ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
115

For Senior & Graduate Courses

ループ量子重力理論への招待

入門から新たな進展に向けて

◆

玉置 孝至 著



サイエンス社

SGCライブラリ-115

ループ量子重力理論への招待

入門から新たな進展に向けて

玉置 孝至　著

サイエンス社

まえがき

本書はループ量子重力理論と呼ばれる理論の入門書である．この理論が流行したのは約 10 年前であり，現在は論文の数で見れば減っている．その事情を知っている人には「なぜ今さら教科書を」という印象を与えるかもしれない．私自身もこの本の依頼を受けた当初はこのような印象を持ち，また，既にこの分野の研究から遠ざかっていた．しかし，落ち着いて考えてみると，元々量子重力理論の研究を短期的に判断することにそれ程意味があるとは思えない．過去を振り返って見ても周期的に進展を繰り返しているという見方ができる．新たな進展が得られる日も遠くないのかもしれない．そういう意味で，ある程度進展が収まった現段階で教科書を書くというのは理に適っていると思い直し，執筆することにした．この周期的な進展，量子重力理論の過去の研究を振り返りつつ，ループ量子重力理論の位置づけを述べてゆきたい．

一般相対性理論の正準量子化は，1960 年代に Wheeler や DeWitt らによって提唱された．興味深い試みだが，元々の Einstein 方程式が計量について非多項式のため，計量を基本変数として量子化したのでは解くことの困難なものであった．このため，目立った進展のない時期が続いていたが，1980 年代に Hawking や Vilenkin らによってあらかじめ時空に一様等方性を課した方程式を調べ，宇宙の生成を調べる研究がなされると一躍脚光を浴びた．この研究は Hawking による一般向け解説書の影響もあって，研究者だけではなく一般の興味も惹いた．この量子宇宙論の研究も宇宙創生確率を巡る曖昧さなどと関連してこれ以降停滞期を迎えるが，同じ時期に Ashtekar によって自己双対接続を用いた一般相対性理論の書き換えがなされ，その後のループ量子重力理論の発展への基盤が固められつつあったのである．

ループ量子重力理論の重要な発展に，1995 年の Rovelli と Smolin によるスピンネットワーク基底の定式化が挙げられる．これを元に面積や体積の固有値，最小単位が議論できるようになった．さらに量子重力理論の長年の課題であったブラックホールエントロピーの統計力学的導出までもが議論されるようになり，量子重力理論の有力候補ということを印象づけた．そればかりではない．2000 年代，Bojowald らによってループ量子宇宙論の定式化が進められると，これまで量子重力理論の研究に興味を示さなかったグループをも巻き込んで，世界的な流行を巻き起こした．ブラックホールエントロピーと同様に量子重力理論の長年の課題であった特異点回避が議論できるようになっただけではなく，インフレーションと絡んで観測に関わる議論ができるようになったことが大きな原因であろう．また，高エネルギー宇宙線を利用した量子重力的効果の検出可能性も盛んに議論されるようになった．

一方，これら一連の流行に引き続く議論によって様々な問題点も浮き彫りになった．例えば，ブラックホールエントロピーの統計力学的自由度と言っても曖昧さが残っているし，ループ量子宇宙論でも離散化の不定性などがある．本書ではこのような問題点についても説明してゆきたい．近年

では問題点に目をつぶったままループ量子重力理論の結果だけ借用したような論文が出続ける一方で，不完全ながらも原理的な問題を解決しようとする努力も増えつつあり，過渡期にあると言える．ループ量子重力理論は，これまでの量子重力理論では比較にならないほどの人数の研究者を得ることに成功した．これは一つの重要な点である．大きなブレイクスルーが起こる可能性もあり，意欲的な研究者が新たなことをなすには面白い時期かもしれない．

このような状況を鑑みれば，この時期にループ量子重力理論の入門書を書くことができるというのは幸運なことだと言える．踏み台として乗り越えるべきものを提示することができるからである．ループ量子重力理論の代表的な教科書には Rovelli の Quantum Gravity が挙げられるが，書かれた時期の違いもあって，本書のような批判的な書かれ方はしていない．そうした意味も含め，本書がループ量子重力理論を学ぶものにとって何らかの役に立つことを願う．

本書は一般相対性理論の知識は前提として書かれているが，そうでなくてもあらすじだけは追えるように，簡単な一般相対性理論の入門も用意した．あまりループ量子重力理論の数学的な側面には立ち入らず，逆に応用面の話を増やして，ストーリーを追えるように心がけた．数学的な側面については Rovelli や Thiemann の教科書を参照されたい．

本書の構成としては次のようになっている．第 1 章ではなぜ量子重力理論を考えるのか，なぜループ量子重力理論なのかという点を説明する．第 2 章では一般相対性理論の入門的解説をすると共に，ブラックホール熱力学や特異点定理といった量子重力理論が取り組むべき課題も提示する．第 3 章では，重力の正準形式の説明をすると共に，1980 年代の量子宇宙論についても述べる．第 4 章では，ループ量子重力理論の定式化，特にスピンネットワークの概念を説明する．第 5 章から第 7 章では一様等方ループ量子宇宙論とその対称性を弱めた場合への拡張を説明する．第 8 章ではブラックホールエントロピーの統計力学的自由度についてのループ量子重力理論からのアプローチを説明する．第 9 章ではこれら以外の重要な話題について触れる．付録 A と付録 B では，それぞれ結び目理論の紹介と煩雑な計算のまとめを行った．

この本を書くにあたって，有益な助言を下さった前田恵一氏，「数理科学」編集部の高橋良太氏，共同研究者の雨宮史年氏，島野正大氏，田中友氏，野村英史氏，原田知広氏には心から感謝する．本書の一部は共同研究のときの議論に基づいている．

2014 年 11 月

玉置 孝至

記法の注意： 時空を表す添字として小文字のギリシャ文字 $\mu, \nu, \cdots = 0,1,2,3$, 実空間を表す添字として小文字の英文字 $a, b, \cdots = 1,2,3$, 内部空間の添字として大文字の英文字 $I, J, K, \cdots = 1,2,3$ を用いた．基本的に $c = \hbar = 1$ としたが，重力定数 G は明示するようにした．horizon は地平線との訳もあるが，地平面と訳した．ブラックホールエントロピーの状態数を数えるときは "表面積" と関連付けるため，"線" よりは "面" の方がしっくりきたためである．

スピンネットワークを記述する用語としてエッジとリンク，バーテックスとノードは，それぞれ同義で用いられる場合がある．本書ではリンクとノードで統一した．

目　次

第 1 章　イントロダクション　1

1.1　なぜ量子重力理論を考えるのか？ 1

1.2　重力の量子化へのアプローチ 3

1.3　なぜループ量子重力理論か？ 5

第 2 章　一般相対性理論とその問題点　7

2.1　特殊相対性理論 7

2.2　一般相対性理論 9

2.3　一般相対性理論から生じる疑問 13

2.3.1　ビッグバン宇宙論の成功とダークエネルギーの謎 13

2.3.2　ブラックホール熱力学 19

2.3.3　特異点定理 24

第 3 章　重力の正準形式と Wheeler–DeWitt 方程式　27

3.1　重力の正準形式 27

3.2　Wheeler–DeWitt 方程式と量子宇宙論 30

第 4 章　ループ量子重力理論の定式化　35

4.1　格子ゲージ理論との対応 35

4.1.1　ホロノミー変数 35

4.1.2　変数の書き換え 37

4.1.3　量子化と Wilson ループ 40

4.2　実接続と演算子 44

4.2.1　準古典極限の問題 45

4.2.2　面積公式とスピンネットワーク 47

4.2.3　n バレント 50

4.2.4　体積作用素 52

4.3　数学的側面 53

4.3.1　スピンネットワーク 53

4.3.2　Haar 測度と内積 54

第 5 章　ループ量子宇宙論 I：基本編 **56**
5.1　一様等方時空とホロノミー変数 56
5.2　量子化 60
5.3　離散化の不定性 62
5.4　特異点回避と演算子順序の問題 64
5.4.1　等面積離散化を用いた場合 64
5.4.2　等体積離散化を用いた場合 67
5.4.3　スカラー曲率の振る舞い 69
5.5　物質場と特異点回避 69

第 6 章　ループ量子宇宙論 II：応用編 **72**
6.1　体積固有値が大きい極限 72
6.1.1　離散化を行わない Wheeler–DeWitt 方程式の場合 72
6.1.2　等面積離散化を用いた場合 73
6.1.3　等体積離散化を用いた場合 75
6.2　バウンスシナリオ 77
6.3　インフレーションとループ量子宇宙論 80
6.3.1　インフレーションで用いられる物理量 81
6.3.2　等面積離散化を用いた場合 83
6.3.3　等体積離散化を用いた場合 87
6.3.4　ループ量子宇宙論におけるゲージ不変摂動論の進展 89

第 7 章　特異点回避周辺 **92**
7.1　一様時空の場合 92
7.2　Schwarzschild ブラックホールの場合 94
7.3　ブラックホール形成シナリオへの影響 96
7.4　Lemaitre–Tolman–Bondi 時空の場合 98
7.5　一般的な場合 99

第 8 章　ブラックホールエントロピー **100**
8.1　ABCK formalism：古典論 100
8.2　ABCK formalism：量子論 102
8.3　状態数の計算 104
8.4　面積固有値による違いと近年の進展 108
8.5　考察 109

第 9 章　その他の重要な話題 **112**
9.1　Ashtekar 接続における Chern–Simons 解 112

9.2　変形量子化とスピンネットワーク 113
9.3　準固有振動と面積離散化の関連 115
9.4　自己組織化仮説 118
9.5　宇宙線を用いた検証可能性 121

第 10 章 まとめと今後の課題 **123**

付録 A　結び目理論 **125**
A.1　Reidemeister 変形 125
A.2　Jones 多項式と Chern–Simons 解 127

付録 B　計算補足 **129**
B.1　4 次元曲率と 3 次元曲率の関係 129
B.2　曲率とスピン接続の関係 130
B.3　運動量拘束条件及び Hamiltonian 拘束条件の書き換え 132
B.4　インフレーション等で用いる補正 133

参考文献 **135**

索　引 **140**

第1章
イントロダクション

ここでは量子重力理論を考える理由を説明すると共に，ループ量子重力理論の位置づけについても述べる．

1.1 なぜ量子重力理論を考えるのか？

日常生活から中性子星などの強い重力場に至る幅広い範囲を記述する代表的な重力理論として一般相対性理論がある．地上の物体などの弱い重力場の極限でNewton重力を再現するだけでなく，Newton重力では説明困難な水星の近日点移動，日食時の光の歪みをも説明することができる．さらにはHulse–Taylorパルサーを始めとする連星周期の観測による重力波の間接的な存在証拠，ビッグバン宇宙論の成功など，基本的には非常にうまくいっていると言える．

それではなぜ量子重力理論を考えるのだろうか？ 一つには宇宙の創生，進化と関連した問題が挙げられる．宇宙初期にはインフレーションと呼ばれる宇宙の指数関数的な膨張が起こったことが観測的に非常に有力視されている．このインフレーションを起こすのはスカラー場などの場であると考えられるが，その前に時空が存在している必要がある．この時空は誰が用意したのだろうか？科学と哲学の境界領域ではあるが，スカラー場の起源は議論して時空の起源は議論しないのでは片手落ちであり，このような時空の創生を扱うのは量子重力理論の課題である（第3, 9章）．また，現在観測されている宇宙を説明するには**ダークエネルギー**と呼ばれる宇宙の加速膨張を引き起こすものが必要であり，その正体としては**宇宙項**が有力である．量子論的な立場によると，この宇宙項は観測より 10^{120} 倍程度大きいことが期待される．超重力理論では 10^{60} 倍程度であるとも言われているが，いずれにしても観測との整合性からほど遠く，こうした矛盾を解消するためには量子重力理論が必要であるとする意見が支配的である．

また，世の中の物理現象を記述する相互作用としては4種類のものが知られており，少なくとも重力を除く3種類については量子論を用いることでより原理的な説明がなされてきた．粒子，場，力というものの関係を本質的に理解しようと思えば量子論が必要である．重力理論だけが古典論で留まるべし，とする積極的な理由に欠けるばかりか整合性の点からも問題がある．

さらに，一般相対性理論の内部整合性には初めから大きな問題がある．**特異点定理**によると，ブラックホール中心近傍や宇宙初期といった状況では，一般相対性理論が自分自身の枠組みの中で記述できない事柄があることを認めてしまっている（第2章）．こうした状況も，微視的な状況を記述する量子力学と組み合わせた量子重力理論を考えることで解決されると期待される（第5章から第7章）．

ブラックホールに関わる量子重力理論の必要性も見逃せない．ブラックホールは通常の熱力学の法則と似た**ブラックホール熱力学**と呼ばれる法則を持つ．これは元々は古典的な一般相対性理論を出発点としていたが，量子論との関連を考えると通常の熱力学との深遠な類似が明らかになってゆく（第2章）．ブラックホールの周囲での場の量子論（重力そのものの量子化は考えない）を用いることで，地平面重力 κ に比例した温度 T_{BH} を持つことが Hawking によって示されたのである[1]．具体的には $T_{\mathrm{BH}} = \frac{\kappa}{2\pi}$ であり，これと第一法則を組み合わせると $S = \frac{A}{4G}$ という式が成立する．G, A, S はそれぞれ重力定数，事象の地平面の表面積，ブラックホールのエントロピーである．数係数まで含めて熱力学と対応が付くと，その統計力学的な起源は何か？ その正体は量子重力理論が答えてくれるのではないか？ と期待するのが当然の流れであろう（第8章）．

また，これと関連して**ブラックホール情報喪失の問題**も挙げられる．特に Schwarzschild ブラックホールでは蒸発と共に Hawking 温度は上昇し，ますますブラックホールの質量は軽くなる．形式的には質量が0になると共に Hawk-

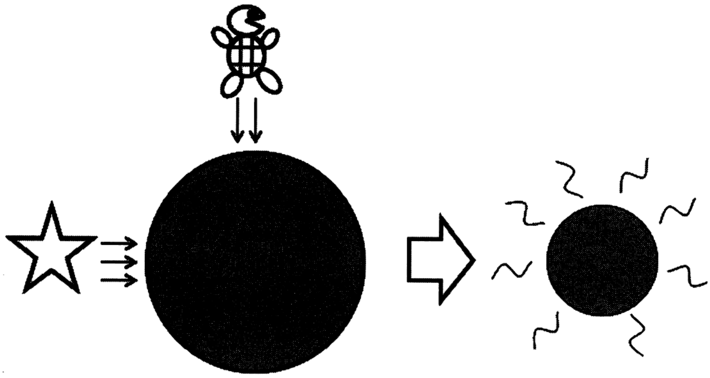


図 1.1

ing 温度は発散してしまう．それでは実際には最終的に何が起こるのか，という疑問が生じる．単にブラックホールが消滅する可能性も考えられるが，この場合にはブラックホールに落ち込んだ情報が消滅してしまうことも意味する．例えば，元々のブラックホールは星や怪獣（？）など様々なものを飲み込んでできていると考えられるが，外に出てくるのが熱的な輻射だけだとすると，中に何が入っていたのかという情報は失われてしまう（図 1.1）．ただし，蒸発が進めば進むほどブラックホールを背景時空として固定する近似はますます悪くなり，この問題を解決するにはどうしても重力そのものを量子化して扱う必要がある（第 7 章）．

ここに挙げたものが全てではないが，観測的にも理論的にも量子重力理論の構築は不可欠であり，様々なアプローチが考えられている．

1.2 重力の量子化へのアプローチ

一般相対性理論の量子化として，まず Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,3)$ からのずれを $\gamma_{\mu\nu}$ と表し，$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\gamma_{\mu\nu}$ と書いて通常の場の理論の方法を用いて摂動論的に量子論を構成しようとする方法が考えられる．この場合，その量子化において**繰り込み不可能**な発散が現れることが知られている．そのため，一般相対性理論を修正して繰り込み可能な理論を構築しようというのが一つの立場である．単純に一般相対性理論を拡張したものとしては Hořava 理論のように，高階微分を含む理論が考えられる[2]．また，超弦理論のように基本構成要素を根本的に見直した結果，繰り込み可能であることが判明するのかもしれない．これらについては数多くの解説が出ているので，そちらに委ねることにする[3]．

次に，最初から非摂動論的に量子重力理論を構築しようとする立場もある．まず思いつくのが計量の空間成分 g_{ab} $(a,b,c,\cdots=1,2,3)$ を基本変数と考える方法であろう．この場合困難が生じるのは，基礎方程式が計量についての非多項式のため，量子化して解ける見込みが殆どないことである．従って，基本変数の取り方に工夫が必要であり，このアプローチの例が本書で述べるループ量子重力理論である．

ただし，次の根本的な問題は残っている．計量の場合で言えば，計量が背景時空としての役割と動的な場としての両方の役割をこなさなければならない点である[4]．例えば計量を演算子化して $\hat{g}_{ab}$ のように書き，空間的に隔たった 2 点 x, x' に対して

$$[\hat{g}_{ab}(x),\hat{g}_{cd}(x')]=0 \tag{1.1}$$

が成立する，と言うことにどれだけの意味があるだろうか．本来は計量が決まらないと 2 点が空間的に隔たっているかどうかも自明ではない．これは非摂動

論的な量子重力理論の本質的な問題を示している.

また，前半で述べたことと矛盾するようではあるが，重力に量子論を適用するのは根本的な問題点があるのではないか，というのも慎重に検討すべき事柄である．結合定数が次元を持つ点など，他の相互作用に見られない特徴もあり，中には重力に量子論を適用すべきではないとする考え方もある．相互作用の記述の面からの不自然さ以外の反論として，Einstein 方程式の物質場の項だけ量子化して，曲率の方を量子化しない場合に想定される不合理が挙げられる[4].

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\langle \hat{T}_{\mu\nu}\rangle \ . \tag{1.2}$$

ここで，$\langle \hat{T}_{\mu\nu}\rangle$ はストレスエネルギー演算子 $\hat{T}_{\mu\nu}$ の期待値である．仮にこの物質の状態が，確率 1/2 で領域 A にあり，確率 1/2 で領域 B ($\neq$ A) にあるとしよう．そうすると観測する前は重力場もこの中途半端な状態に置かれるわけである．ところが観測した瞬間，右辺の物質の方は A にいるか B にいるかどちらかになるから，これに合わせて重力場の方も不連続的に変化せざるを得ず，不合理であるという論法である（図 1.2)．一見するともっともらしいが，実際にはこうした実験が行われているわけではないことに注意することは重要である．量子論と Newton 重力理論が共に関わる現象が観測されたのさえ比較的最近のことである[5]．当然，曲がった時空での場の量子論，ブラックホールが温度を持つことも検証されているわけではない．また，図 1.2 では一瞬で観測したような絵を描いたが，観測自体光速以下で行うわけであり，不合理なのかそうでないのかも本当は自明ではない.

こうした状況を逆手にとって，量子論における観測と重力が密接に関わって

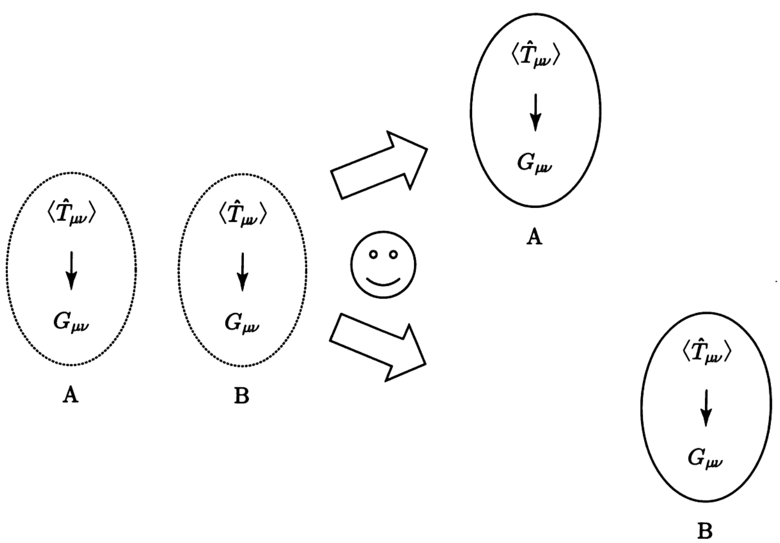


図 1.2　観測に伴う重力場の瞬間的変化.

いる可能性を考えたのが Penrose である．状態の収縮というものを起こすのが重力であると考える．2 つの状態の自己重力エネルギーの差 $E_{\rm G}$ を用い，収縮のタイムスケール $T_{\rm G}$ は $\hbar$ をあらわに書いて，

$$T_{\rm G} = \frac{\hbar}{E_{\rm G}} \tag{1.3}$$

である，とする考え方である．粒子系を用いた検証可能性[6]，宇宙初期の量子揺らぎの古典化の問題を解決する上でこの提案が役に立つ可能性[7]，あるいは人の意識というものを理解する上でこのような波束の収縮の議論が必要であるとする話もあり，興味深い[8]．この話は別にしても，量子論がどこかで破綻しているのではないか，その中に重力が深く関わっているのではないか，というのは常に心に留めておく必要があるだろう．

1.3 なぜループ量子重力理論か？

前節で挙げた可能性のうち，2 つ目の可能性を探求したものの一つがループ量子重力理論である．非摂動論を考える上で参考になるのが格子ゲージ理論である．大雑把に言えば 1 つ目の可能性の中に超弦理論も含まれると見ることもできる．超弦理論は全ての相互作用を統一的に記述するという統一理論としての意義が大きく，最も有力な量子重力理論の候補と考えられている．これだけ言うと他の理論は考えなくてもいいのではないのか，と思う読者もいるかもしれないが，超弦理論は摂動論を元に構築が進められている理論である．電磁場や Yang–Mills 場などのゲージ理論も含んでいるが，ゲージ理論も非摂動論的に扱おうと思えば，格子ゲージ理論が必要な部分がある．重力理論もゲージ理論の一種であると考えることができるので，非摂動論的量子化を試みる段階で格子ゲージ理論の手法を取り入れるという発想がありうる．このために変数をゲージ理論に似た形に書き換える必要があり，ループ量子重力理論はこの基本変数の取り方に大きなポイントがある．従って，なぜループ量子重力理論か，ということの一番の理由としては非摂動論的定式化，**背景独立性**が挙げられる．超弦理論から背景独立な理論を構築することが完全になされているとは言えないため，研究する一つの方向性として意義がある．

背景独立性を売りにした他の試みとしては**因果的動的単体分割** (causal dynamical triangulation)[9],[10]，**Causal Set**[11]，**非可換幾何学**からのアプローチ[12]などもある．これらも興味深い試みであり，注目してゆきたい．ただし，これらは現段階では一般相対性理論という古典論では非常にうまくいっている理論からはあまりにもかけ離れている印象があり，一般相対性理論を元にしたループ量子重力理論の役割を奪うものではない．

一方で超弦理論と比べた場合に挙げられる批判には次のようなものがある．

1. 一般相対性理論という低エネルギー近似に過ぎない（と考えられる）ものを非摂動的に量子化しても意味がない．
2. 時空を含め，4 次元の理論である．
3. 統一理論ではない．
4. 真空が定義できない．

最初の批判に対する意見を代表するものとしては，微分同相写像不変性と背景独立性を満たす理論（基本的には計量理論を指す）であることが重要なのであって，一般相対性理論という特定の形にはこだわらないという立場がある[13]．そういう意味では Hořava 理論，超重力理論のようなものであっても一向に構わないことになる．実際，そのようなアプローチもある[14]．他の理論から借りてきて折衷的に組み合わせている感は否めないが，単なる一般相対性理論の量子化とは異なるものが見えてくれば面白い．

2，3 番目の批判に対しては発展途上である．4 次元の理論であることを肯定的に捉える立場もあるが，こだわる必要はないだろう．一般の次元へ拡張する試みが Thiemann を中心とする人々によって行われており，今後の流れの一つになるだろう[15]．また，**結び目理論**に基づく統一理論へのアプローチなども進行中であり，missing link を結ぼうとしている（？）最中と言える[16]．

最後の批判が正当と言えるかどうかは意見がわかれることと思われる．真空を定義すべき背景時空をそもそも持たないためである．ループ量子重力理論の国際会議では，超弦理論のランドスケープ問題，真空が 10^{100} 以上のオーダーで存在すること[17]を批判的に言うのを耳にしたが，これは如何なものか．ループ量子重力理論では Minkowski 時空でさえもスピンネットワークという構成要素から構築しようという発想なので，出発点からして違っている．このようにループ量子重力理論には問題点もあるが，背景独立性という長所と表裏一体で超弦理論と相補的であるという特徴を持ち，一つの方向性として考え続けるべきと言える．

第 2 章
一般相対性理論とその問題点

ここでは一般相対性理論の入門的な解説をし，その中から生じる疑問について述べる．これらの疑問のうちの幾つかは後にループ量子重力理論によって取り組まれることになる．

2.1　特殊相対性理論

特殊相対性理論は，慣性系同士の**相対性原理**と**光速度不変の原理**を元に構築された理論である．20 世紀初頭までは，慣性系同士で成り立つ法則を述べたものとしては Newton 力学及び電磁気学の Maxwell の方程式が知られていた．前者の Newton 力学も相対性原理，つまり慣性系同士であれば力学の 3 法則は同じように成り立つという原理に基づいていた．異なる慣性系は **Galilei 変換**で結ばれている．例えば図 2.1 のように慣性系 O 及び O' において直交座標系を取り，O' は O に対し，x 軸正の向きに一定の速さ v で動いているとする．

時間 t は異なる慣性系同士でも変化することなく同じで $t=t'$，これを前提として

$$x = x' + vt, \quad y = y' \tag{2.1}$$

である（x' 軸は便宜上 x 軸とずらして描いてある）．ここには図示していない

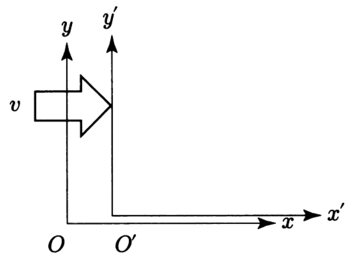


図 2.1　2 つの慣性系．

が，紙面に垂直方向に z 軸があれば，$z = z'$ である．簡単のため x 成分だけ考えて質点の質量を m，これに作用する力の x 成分を F とすれば，(2.1) より

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2x'}{dt'^2} = F \tag{2.2}$$

である．これは慣性系 O 及び O' における力学の法則は同じであることを意味し，例えば地上とこれに対して等速直線運動をする船における力学の法則は同じである*1)．

これで済めば話は簡単であるが，光速度 $c \approx 3.00 \times 10^8$ m/s はどの慣性系に対しても同じである，という証拠が積み重ねられてきた．代表的なものが Michelson–Morley の実験である．従って，相対性原理に加えて光速度不変の原理を同時に採用することになる．この 2 つを前提とすると，Newton 力学で前提としていた $t = t'$ は捨てざるを得ず，図 2.1 と同じ状況では **Lorentz 変換**

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad y = y', \quad z = z' \tag{2.3}$$

が成立する．慣性系 O' が x 軸と異なる向きに進んでいても本質は変わらない．電磁気学の Maxwell の方程式は Lorentz 変換に対して不変であり，最初から Newton 力学とは相容れないものであった．

同時刻という概念が慣性系によるだけでなく，慣性系 O から別の慣性系 O' を見た場合には，異なる点での時刻の同期化さえされていない．このことは多くのパラドックスを生んだ．このため，空間と時間をセットで考えることが重要になる．「いつどこで」という両方を指定したものを**事象**と呼ぶ．

時間まで慣性系によって変化してしまっては物事を考えにくいと感じるかも

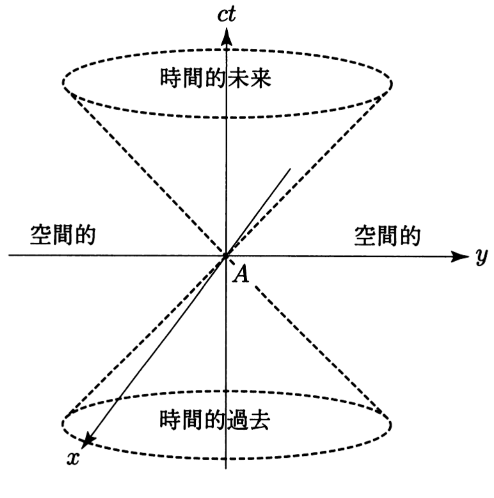


図 2.2　事象間の関係.

*1)　もちろん，地上も慣性系とは言えない．日常の言葉で慣性系の例を示すのが困難であるため，話を単純化している．

しれないが**線素**

$$s^2 := -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{2.4}$$

は 2 つの事象に対して不変量になっている．つまり，Lorentz 変換に対して不変である．事象 A と B に対し，$s^2 < 0$ であればこれらの関係を**時間的**と呼び，どの慣性系から見ても一方の事象の方が先に起こったことを意味する．$s^2 > 0$ であれば**空間的**と呼び，どの慣性系から見てもこの 2 つの事象は空間的に隔たっていることを意味する．この様子は図 2.2 のように，ある事象（ここでは A）を基準とした空間と時間の様子で表されることが多い．z 座標は省いて書いている．A に到達する光の経路，A から放射される光の経路の境界は図の点線のように表され，これを**光円錐**と呼ぶ．B が光円錐の外側にあれば空間的であり，内側にあれば A より先か後かに応じて時間的過去，時間的未来かが決まる．以下では光速 $c = 1$ とする．

2.2 一般相対性理論

一般相対性理論では前節の内容を非慣性系同士にまで拡張して考える．この場合の鍵となるのが**等価原理**である．有名な思考実験に，外の見えないエレベーターに人を乗せ，このエレベーターを自由落下させるというものがある．遊園地の乗り物をイメージすればよいが，体がふわっと浮き上がるような感覚，無重力感覚を味わえる．外が見えなければ，自由落下により加速度運動していて重力の効果を打ち消しているのと，最初から慣性系にいて重力が働いていないのとは区別が付かない．仮に重力加速度が組成依存，例えば元素の種類によって異なっていれば，加速度の効果と重力の効果を区別できるが，今日までそのような違いは検出されていない[18]．これに基づけば，エレベーターの中の人は慣性系にいて重力が働いていないとみなすことができるが，厳密に言えば地上にいるのと高所にいるのでは重力による加速度の影響が異なるため，非常に局所的な領域に限って考えなければいけない．この**局所慣性系**において線素は

$$ds^2 := -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.5}$$

と書くことができる．(2.4) が全て微小量に書き直されるのである．これをもう少し簡潔に書くため，

$$dx^0 = dt, \quad dx^1 = dx, \quad dx^2 = dy, \quad dx^3 = dz \tag{2.6}$$

のように dx^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ を使って表す．(2.6) で出てきた添字は時間，空間方向を表す添字であって，2 乗や 3 乗とは異なることに注意して欲しい．この書き方を用いると (2.5) は

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + \sum_{\mu=1}^{3}(dx^\mu)^2 \tag{2.7}$$

と書き直すことができる．

地球のような重力源があると，時空の全領域に渡っては (2.7) のように書くことができず，また，非対角成分が現れるかもしれない．このような場合に拡張するため，**計量** $g_{\mu\nu}$ を導入し，抽象的に

$$ds^2 = \sum_{\nu=0}^{3}\sum_{\mu=0}^{3} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.8}$$

と書く．重力の効果を幾何学の変更，時空を曲げているという表し方で表現している．このように上下に添字が揃っている場合には，和の記号を省略して

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.9}$$

のように書くのが通例である．これを **Einstein の規約**と言う．計量を用いると (2.7) の場合，

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

と書くことができ，この場合を $\eta_{\mu\nu}$ と表し，Minkowski 計量と呼ぶ．dx^μ としては必ずしも直交座標系を取る必要はなく，極座標系を取って，

$$dx^0 = dt, \quad dx^1 = dr, \quad dx^2 = d\theta, \quad dx^3 = d\phi \tag{2.11}$$

と表すことも可能である．この場合には同じ局所慣性系であっても

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

であり，計量は座標の選び方によって異なることに注意する必要がある．座標 dx^μ から dx'^μ に移るには，微分の性質

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}dx'^\nu \tag{2.13}$$

を用いて計算すればよい．

次にベクトルの定義について考える．時間と空間をセットで扱う相対性理論

においては，空間成分だけで定義するのは不都合が多い．特殊相対性理論の範囲でも，空間的なベクトルの長さが慣性系によって収縮するなどの不都合がある．ここでは変換性 (2.13) を元に**反変ベクトル** V^μ というもの（$\mu = 0, 1, 2, 3$ と時間空間全成分を考えることに注意）を次の変換性を持つものとして定義する．

$$V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} V'^\nu \ . \tag{2.14}$$

また，下付きの添字を持った**共変ベクトル** C_μ というものは

$$C_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} C'_\nu \tag{2.15}$$

の変換性を持つものとして定義され，このようにしておくとスカラー積 $V^\mu C_\mu$ が不変に保たれるというよい性質を持つ．これを拡張した**共変テンソル**というものの典型的な例が計量 $g_{\mu\alpha}$ で，

$$g_{\mu\alpha} = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} g'_{\nu\beta} \tag{2.16}$$

の変換性を持つ．これは，線素 ds^2 が座標変換に対して不変であるために要請される．同様に反変テンソルは反変ベクトルの拡張として定義できる．この性質を持つものの典型的な例が計量の逆行列にあたる $g^{\mu\alpha}$ である．従って，

$$g_{\beta\mu} g^{\mu\alpha} = \delta^\alpha_\beta \ . \tag{2.17}$$

ただし，δ^α_β は **Kronecker** のデルタであり，$\alpha = \beta$ のとき $\delta^\alpha_\beta = 1$，$\alpha \neq \beta$ のとき $\delta^\alpha_\beta = 0$ で定義される．これを元に例えば 4 階反変，3 階共変テンソル ${C_{\gamma\sigma\tau}}^{\alpha\beta\mu\nu}$ なども定義できる．

さて，それでは異なる点でのベクトル，例えば反変ベクトルを比較するにはどうしたらよいだろうか？ Newton 力学ではあらためて考えるまでもなく，直接差を取ればよい．一般相対性理論でも同じことをすればよいと思うかもしれない．しかし，そこには前提としてベクトルが平行移動して変化しないということが入っている．曲がった時空においてはこれも定義しなければならない．反変ベクトル V^μ を $x^\beta \to x^\beta + dx^\beta$ に平行移動したときの変化 δV^μ を

$$\delta V^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} V^\alpha dx^\beta \tag{2.18}$$

で定義する（図 2.3）．$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ を **Christoffel 記号**と呼ぶ．

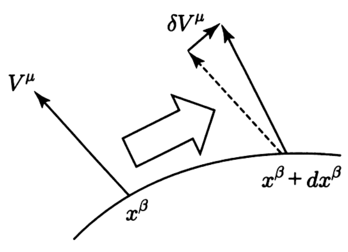


図 2.3　ベクトルの平行移動．

図 2.3 では δV^μ を矢印で表したが，これは一般にはベクトルではない．$x^\beta + dx^\beta$ における V^μ を $V^\mu + dV^\mu$ とする．この dV^μ も一般にはベクトルでないことに注意したい．実際，(2.14) から

$$dV^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dV'^\nu + V'^\nu \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha} dx'^\alpha \tag{2.19}$$

であり，$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha}$ が消えない限りベクトルとしては変換しない．ただし，同一点でのベクトルの差

$$DV^\mu = dV^\mu - \delta V^\mu \ , \tag{2.20}$$

これがベクトルであるべし，という要請を置くことにする．同時に $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ の下付き添字の対称性を要請することで $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ は決まり，計量を用いて

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right) \tag{2.21}$$

と表せる．これを用いると，

$$DV^\mu = \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\beta\alpha} V^\beta \right) dx^\alpha \tag{2.22}$$

と書ける．また，この括弧の中を

$$\nabla_\alpha V^\mu := \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\beta\alpha} V^\beta \tag{2.23}$$

のように書き，これを**共変微分**と呼ぶ．スカラー積 $V^\mu C_\mu$ はスカラー量であるから平行移動によって変化しないことを要請すると，共変ベクトルの場合は

$$\delta C_\mu = \Gamma^\alpha_{\mu\beta} C_\alpha dx^\beta \tag{2.24}$$

であり，同様にして

$$\nabla_\alpha C_\mu := \frac{\partial C_\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\beta_{\mu\alpha} C_\beta \tag{2.25}$$

のように決まる．共変微分を含む $\nabla_\alpha V^\mu, \nabla_\alpha C_\mu$ はテンソルとして変換するが，$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ の変換性を見てみると $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ はテンソルとしては変換しないことがわかる．与えられた点において局所慣性系を取れば $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$ にできる上，座標系を適当に選べば，与えられた曲線に沿って $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$ にできることも示されている[19]．この意味で $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ は時空の歪み具合を測るには適さない量である．

時空の歪み具合を見るには，ベクトルを微小な面積領域 $dx^\beta dx^\gamma$ の周囲に沿って一周させたときに，どれだけ元のベクトルとずれるかを調べればよい．このときのずれ δV^μ はベクトルであり，$\delta V^\mu = R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} V^\alpha dx^\beta dx^\gamma$ と書ける．ここで $R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}$ は**曲率テンソル**と呼ばれるもので

$$R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\mu_{\nu\beta} \Gamma^\nu_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\nu\gamma} \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \tag{2.26}$$

と定義される．Christoffel 記号を用いて表されているが，その組み合わせによってテンソルを構成している．共変微分を用いて

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma}V^{\gamma} = (\nabla_{\mu}\nabla_{\alpha} - \nabla_{\alpha}\nabla_{\mu})V_{\beta} \tag{2.27}$$

と書くこともできる．曲率テンソルを用いて **Ricci テンソル** $R_{\alpha\gamma}$ 及び**スカラー曲率** R を

$$R_{\alpha\gamma} = R^{\mu}{}_{\alpha\mu\gamma}, \quad R = g^{\alpha\gamma}R_{\alpha\gamma} \tag{2.28}$$

と定義できる．これらを元に重力場とその中での物体の運動を記述する基礎方程式を考えたい．物質場が一般には $T_{\alpha\beta}$ という 2 階のテンソルとして表されるということと，弱い重力場，非相対論的運動の極限で Newton 重力を再現すべきという要請は満たす必要がある．実際にはこれだけから一意的に基礎方程式が決まるものではないが，Einstein は

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi G T_{\alpha\beta} \tag{2.29}$$

であるとした．これを **Einstein 方程式**と呼ぶ．作用原理を用いれば

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}d^4x + S_m \tag{2.30}$$

と表せる．g は $g_{\mu\nu}$ の行列式，S_m は物質場の作用である．この理論を一般相対性理論と呼ぶ．

2.3 一般相対性理論から生じる疑問

2.3.1 ビッグバン宇宙論の成功とダークエネルギーの謎

一般相対性理論は地上で Newton 重力を再現するばかりでなく，Newton 重力では説明困難な水星の近日点移動，太陽光線の歪みなどを説明することに成功し，一つの科学理論としての地位を確立した．上述のように一意的に定まる理論ではないにもかかわらず上手くいっている．

ここでは我々の宇宙を説明することができるかどうかを考える．Copernicus 的な視点に立つと我々の宇宙が一様（どこにも特別な場所はない）で等方（どちらにも特別な方角はない）ということを仮定するのは妥当であると思え，このような**一様等方宇宙**では，線素を

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\Omega^2\right] \tag{2.31}$$

と書くことができる．ただし，

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \tag{2.32}$$

である．これを **Friedmann–Robertson–Walker (FRW) 計量**と呼ぶ．k は -1, 0 または 1 であり，それぞれ開いた宇宙，空間的に平坦な宇宙，閉じた宇宙に対応している．$a(t)$ はスケールファクターと呼ばれる．$k=-1$, 0 の場合には体積 (proper volume) は無限だが，$k=1$ の場合は有限で $V=2\pi^2 a(t)^3$ である．しかし，端があるわけではない．この状況は球面には端がないのに表面積が有限であることに対応している．また，球面で三角形を描くと内角の和が 180 度より大きくなるが，閉じた宇宙ではこの事情は同じである．一方，開いた宇宙では内角の和が 180 度より小さくなり，馬の鞍のようなものと事情は同じである（図 2.4）．

簡単のため，物質場を密度 ρ，圧力 p の完全流体とすると，Einstein 方程式から $\dot{}:=\frac{d}{dt}, H:=\frac{\dot{a}}{a}$ として

$$H^2=\frac{8\pi G}{3}\rho-\frac{k}{a^2}, \tag{2.33}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}(\rho+3p) \tag{2.34}$$

が得られる．これらから

$$\dot{\rho}+\frac{3(\rho+p)\dot{a}}{a}=0 \tag{2.35}$$

という ρ と a の関係を決める式が得られる．放射の場合，上式に $p=\frac{\rho}{3}$ を代入すれば C を定数として $\rho=C/a^4$ である．同様に，ダストの場合 $p=0$ で近似して $\rho=C/a^3$ である．

宇宙の姿は遥か昔から未来永劫まで不変であるとする固定観念は，遠方の銀河や銀河団が我々から遠ざかっていることが検証され，打ち砕かれることになった．これは宇宙が膨張していることを意味している．風船が膨らむ様子に似て，我々からの距離が遠いほど遠ざかる速度は速く，その速度は近似的に我々からの距離に比例する．これを **Hubble の法則**と呼ぶ．また，膨張率は上記の H で与えられ，これを **Hubble 定数**と呼ぶ．これを元に (2.33) を見てみると，$k=-1$, 0 の開いた宇宙，平坦な宇宙では $\rho>0$ を前提とすれば右辺は常に正で，膨張が止まることはなく，永遠に膨張を続けることを意味する．ところが

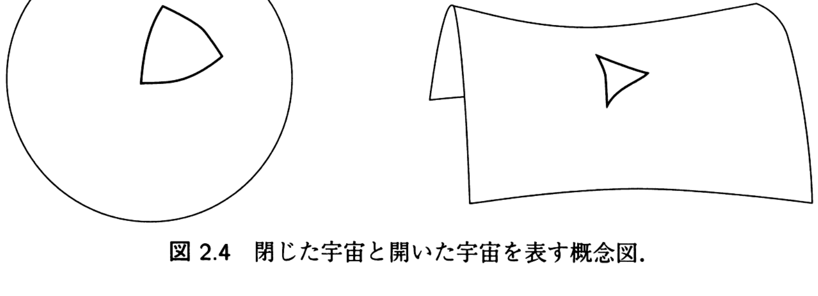


図 2.4　閉じた宇宙と開いた宇宙を表す概念図.

$k=1$ の閉じた宇宙では，膨張して密度が薄くなり，やがて (2.33) の右辺第 1 項目と 2 項目が同じになる．それ以上膨張すれば左辺が正であることと矛盾してしまうが，そうはならず，膨張から収縮に転じることを意味する．これらの様子を表したのが図 2.5 である．

これを元に現在から過去に遡ってみると，上述の密度と $a(t)$ の関係から宇宙の初期には非常に高温高密度の状態があることが予想される．原子核物理学を元にすると，原子でさえもばらばらで，電子が電離された状態になっている時期があったことが予想される．このような時期には光でさえも自由に運動できない．宇宙誕生から約 38 万年後，この電離された電子と原子核が結合し，これを**再結合**と呼ぶ．宇宙というものが "初めて" 誕生したのだと思えば，この呼び方は違和感があるが，宇宙に輪廻転生があるという可能性もあるので，訂正しない方がよいのかもしれない（第 5 章）．再結合の後であれば光は自由に運動できるようになる．これを**宇宙の晴れ上がり**と呼ぶ．もしこれが本当であれば，その名残が現在に残っているはずである．この名残の光，**宇宙マイクロ波背景放射**は，1965 年 Penzias と Wilson（後で出てくる Wilson ループとは関係ない）によって発見された．また，上記のように原子もバラバラの状態から軽元素ができてゆく．水素とヘリウムの比はそれぞれ約 75%，約 25%のはずであり，後の宇宙の発展にはほぼ影響されない．これらの**軽元素の存在比**は HII 領域（周囲に比べ電離された水素原子を大量に含む領域）の観測などから確認されている．Hubble の法則，宇宙マイクロ波背景放射，軽元素の存在比の観測はビッグバン宇宙論の三大証拠と言われており，一般相対性理論はここでも成功している．

しかし，幾つかの謎は残された．宇宙マイクロ波背景放射の観測ではどの方向からやってくる光も 2.73 K に非常に近いのである．光速 c もあらわに書いて

$$r_{\mathrm{H}} = \frac{c}{H} \tag{2.36}$$

を Hubble 地平面半径と呼び，これは粒子同士が相互作用しあえるスケールを

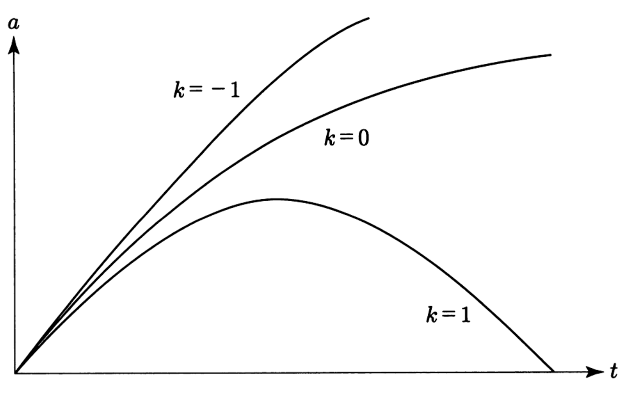


図 2.5　宇宙の時間発展．

表す．宇宙の晴れ上がりの時期にはこのスケールは現在よりずっと小さかったはずであり，見込む角度にして 1 度程度である．観測している領域はこれより遥かに大きく，相互作用をすることのできない多数の領域を起源としていたはずなのにあまりにも一様等方なのである．これは**地平面問題** (horizon problem) と呼ばれる．また，(2.33) からは密度の値を適当に選んだのではあっという間にスカスカになってしまうか，閉じてしまうことがわかる．丁度臨界密度 $\rho_0 \simeq 10^{-29}\,\mathrm{g/cm^3}$ のときには空間的平坦であるが，宇宙年齢が 100 億歳以上であるためには，

$$\frac{|\rho - \rho_0|}{\rho} < 10^{-15} \tag{2.37}$$

を満たさなければならない．何故ここまで上手くできているのかは説明が必要であり，これは**平坦性問題**と呼ばれる．また，統一理論的な観点からは宇宙初期には非可換ゲージ理論起源のモノポールが大量につくられるはずであるが，これは殆ど観測されていない．これは**モノポール問題**と呼ばれる．

これらを一気に解決してくれる上，宇宙の物質エネルギーの起源も説明してくれるのが**インフレーション**である．仮に (2.33) において ρ が一定であるとしよう．そうすると a は指数関数的に膨張する解を持つ．このままだと宇宙はスカスカになってしまうが，ある時期にこのような膨張が終わればよい．仮にこのようなことが起これば，非常に小さな領域が拡大されることになる．現在観測している宇宙マイクロ波背景放射は，限られた領域だけ見ていることになるので，上記の一様等方性と矛盾しなくなる．同様に平坦性問題，モノポール問題も解決される．このようなインチキじみたことをしてくれるのがスカラー場である．簡単のため，スカラー場 ϕ の密度を

$$\rho = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + V(\phi) \tag{2.38}$$

と書く．スカラー場のポテンシャル $V(\phi)$ が図 2.6 のようであり，最初は ϕ が原点付近にあったとしよう．このようにポテンシャルがなだらかな領域では密度がほぼ一定であり，これを**スローロール**領域と呼ぶ．このとき a の指数関数的な膨張，インフレーションを起こすことができる．やがては $V = 0$ のところに落ち込んでゆきインフレーションを終わらせることになる．そして $V = 0$ 付近を振動して宇宙を適切な温度に加熱してくれればよい．上記の問題を解決するにはインフレーションの始まりと終わりの a をそれぞれ a_i, a_f として **e-folding** と呼ばれる

$$N_e := \log\left(\frac{a_f}{a_i}\right) \tag{2.39}$$

が 60 から 70 以上が必要とされている[20]．このインフレーション期の量子論的揺らぎが宇宙マイクロ波背景放射の中に残っており，探査衛星 COBE によ

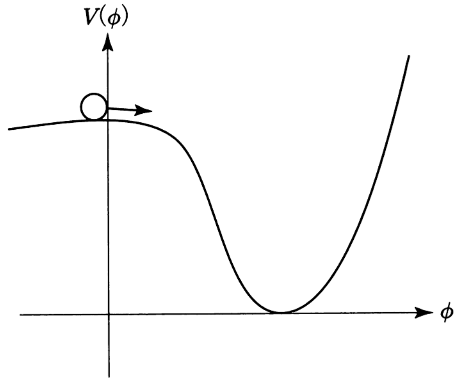


図 2.6　スカラー場のポテンシャルの例.

る観測の中心人物 Mather と Smoot は 2006 年ノーベル物理学賞を受賞している．これは探査衛星 PLANCK などによってさらに精密に検証されていると言える．

このスカラー場の起源は統一理論的な観点からは色々考えることができるし，複数あってその複合効果が現れていてもよい．また，Planck スケールに近い現象であるから量子重力的な効果があってもよく，ループ量子重力理論でも議論されている（第 6 章）．インフレーションモデルの絞り込みは重要な課題の一つである[21]．特に最近では BICEP2 によって間接的（宇宙マイクロ波背景放射の偏光モードの観測）にインフレーション起源の宇宙初期重力波が検出されたとの報告もあり，目が離せない[22]．ただし，それ以前の根本的な疑問も残されている．それではこのインフレーションを起こすスカラー場を入れる時空は一体誰が用意したのだろうか？ 時空そのものが生成されるかどうかを問う段階になると，これは量子重力理論を元に考えるしかないだろう（第 3, 9 章）．

一方，(2.34) に注目してみよう．通常の物質しかなければ $\rho + 3p > 0$ のため，減速膨張ということになるが，Ia 型超新星，バリオン音響振動，宇宙マイクロ波背景放射の観測などから現在の宇宙は加速膨張していることがわかっており，このような加速膨張を引き起こす成分を総称してダークエネルギーと呼んでいる．また，現在のように銀河や銀河団などの構造ができるには地上にある物質，バリオンだけでは無理であり，重力源となる未知の物質**ダークマター**が必要であることがわかっている．宇宙の組成としてはダークエネルギー約 68%，ダークマター約 27%，バリオン約 5% であり，地上の物質はこの宇宙から見ればごく少数派であるという驚愕の結果が確立されつつある（図 2.7）．

ダークマターについては素粒子論起源の粒子が有力候補として挙げられるが，もっとわからないのがダークエネルギーである．ダークエネルギーの候補については様々な議論があり，上記のように一般相対性理論が一意的な理論ではないことに着目し，(2.30) の R を一般的な関数形 $f(R)$ で置き換えるという試みなどがある．しかし，太陽系の実験とダークエネルギーの要請だけでなく，中性

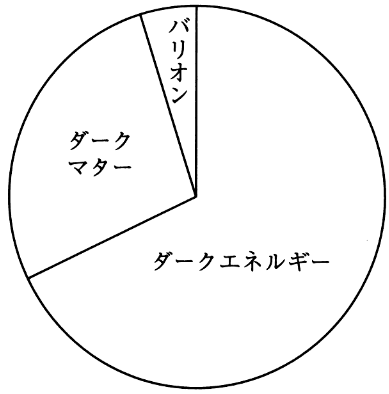


図 2.7

子星を始めとする強い重力場からくる観測的制限まで満たそうと思うと $f(R)$ の関数形としては非常に人為的なものにならざるを得ない[23]．シンプルなダークエネルギーの候補として最も有力なのが宇宙項 Λ であり，これを付け加えると Einstein 方程式は

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta} \tag{2.40}$$

である．観測的に必要とされている宇宙項はエネルギー換算で $\Lambda/(8\pi G) \simeq 10^{-47}\,\mathrm{GeV}^4$ 程度である*2)．

それではこの起源は何かということになるが，有力なのは真空のエネルギーである．しかし，このエネルギー密度 ρ_{vac} を見積もってみると観測との整合性が取れないのである．真空のエネルギーと言うと漠然としていると思われるかもしれないが，$\hbar$ をあらわに書くと，量子化された調和振動子がゼロ点エネルギー $\frac{\hbar\omega}{2}$ を持つことを思い起こそう．ω は調和振動子の角振動数である．量子場では場の Fourier モードごとに調和振動子と同様な自由度があり，運動量 k，質量 m の場があれば，その零点振動のエネルギーは $\sqrt{k^2+m^2}/2$ である．運動量の最大値 $k_{\max}$ として仮に Planck 質量程度 $1/\sqrt{G}$ を選んだとすると，

$$\rho_{\mathrm{vac}} = \int_0^{k_{\max}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{k^2+m^2}}{2} \simeq \frac{1}{16(\pi G)^2} \simeq 10^{74}\ \mathrm{GeV}^4 \tag{2.41}$$

であり，観測とは全く異なる．$k_{\max}$ を調整してどうにかできるというレベルではない．

これは空洞輻射の Rayleigh–Jeans の公式から量子力学を用いた Planck の公式への変遷を想起させる[25]．エネルギー等分配則を用いると，空洞の単位体積あたりのエネルギーのスペクトル分布は

$$\frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2 d\nu \tag{2.42}$$

*2) 観測的には必ずしも宇宙項がダークエネルギーの最有力候補というわけではなく，今後の進展には注目したい[24]．

である．ここでは光速 c, Boltzmann 定数 k をあらわに書いた．これが Rayleigh–Jeans の公式であるが，これを光の振動数 ν について 0 から ∞ まで積分すれば当然発散してしまう．これは Planck の公式

$$\frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}d\nu \tag{2.43}$$

に置き換えられ解決された．ここではエネルギー素量 $h\nu$ という考え方が取り入れられている．

宇宙項問題がこれに類似した変更だけで解決するというつもりはない．ただし，Planck 質量程度 $1/\sqrt{G}$ の領域に関わることだけに，量子重力理論からこの見積もりが変化するという可能性は残されている．

2.3.2 ブラックホール熱力学

一般相対性理論において，1916 年，真空で静的球対称，漸近平坦の仮定のもとで見つけられたのが次の Schwarzschild 解である．

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \ . \tag{2.44}$$

ただし，M は中心物体の質量であり，中心から十分遠方において定義される．一般的には（星の回転を無視する近似のもと）星の外部を表す解と考えることができる．この表式で $g_{00} = g_{11}^{-1} = 0$ になる場合が気になるが，太陽の表面においても $\frac{2GM}{r} \simeq 10^{-6}$ であり，解が発見された当初は現実的にこのような条件が満たされることはないと思われていた．しかし，原子核物理学の進展と共に星の進化の様子がわかるようになった．太陽のような恒星では核反応によって星が潰れてゆくのを留めているが，このような燃焼が終わってしまえば電子，あるいは中性子の縮退圧によって星を支えるというのが次の可能性である．半径が 10 km 程度で太陽質量の約 2 倍を超えてしまうと，星を支える力の中で最も大きな中性子の縮退圧をもってしても自分自身を支えきれず，重力崩壊という現象を起こす．図 2.8 は質量 M の星が重力崩壊してゆく様子を模式的に表

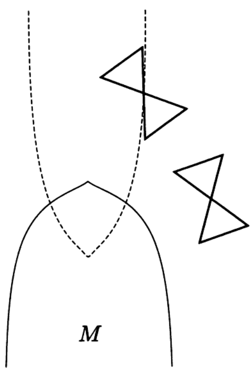


図 2.8　星の重力崩壊と光円錐．

したものである．光円錐は局所的にしか定義できないが，未来には必ずその内側に入ってしまうような境界面，光が脱出できるかできないかの境界面ができてしまう．光が無限時間かかっても脱出できない境界面を**事象の地平面** (event horizon) と呼び，(2.44) では $g_{00} = g_{11}^{-1} = 0$ の面に相当する．このような事象の地平面を持つ物体を**ブラックホール**と呼ぶ．

ブラックホールの直接的な証拠を見つけるのは難しいが，連星をなしている場合などは間接的な証拠を見出すことができる．この場合は連星の一方の運動から質量が測定され，周囲のガスが吸い込まれてゆく様子などから大きさや $g_{00} \simeq 0$ を満たす面があることが推測できる．$g_{00} = g_{11}^{-1} = 0$ の面を超えてしまえば脱出は不可能のはずであるから証拠が間接的なものになってしまうのは仕方がない．しかし，現在では非常に多くの間接的なブラックホールの証拠が見つかっており，その存在を疑うのは難しい．我々の住む銀河の中心にも巨大ブラックホールがあると推定されている．

Schwarzschild 解が発見されてすぐ，次の Reissner–Nordström 解が見つかった．

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \; .$$

ただし，Q は電荷であり，$4\pi\epsilon_0 = 1$ と置いた．事象の地平面を持つ場合は静的球対称で電磁場の入ったブラックホール解とみなせる．事象の地平面では重力の強さが発散しているのではないかと思われるかもしれないが，光が脱出できないだけの話である．事象の地平面の表面重力 κ は，球対称ブラックホールに対しては上記の座標系で

$$\kappa = \lim_{r \to r_{\mathrm{H}}} \frac{\partial_1 g_{00}}{2\sqrt{g_{00} g_{11}}} \; , \tag{2.45}$$

ただし，地平面の半径を r_{H} と書いた．Reissner–Nordström 解では

$$\kappa = \frac{\sqrt{(GM)^2 - GQ^2}}{2(GM)^2 - GQ^2 + 2GM\sqrt{(GM)^2 - GQ^2}} \tag{2.46}$$

である．ここで $Q = 0$ と置いた場合が Schwarzschild 解の場合に相当し，

$$\kappa = \frac{1}{4GM} \tag{2.47}$$

である．質量が小さいほど表面重力が強くなることを意外に思うかもしれない．しかし，その場合地平面 $r_{\mathrm{H}} = 2GM$ も同時に小さくなることに注意して欲しい．直感的には，小さな領域から光が逃げないようにするには，より強い重力が必要であると理解できる．また，(2.46) で質量 M を固定し，Q を大きくすると，$\sqrt{G}M = Q$ で表面重力が 0 になることも注目すべきである．この場合を

極限ブラックホールと呼ぶ．これ以上電荷が大きくなったものはブラックホールではない．

1963 年には回転している Kerr ブラックホール，1965 年にはこれに電荷を入れた Kerr–Newman ブラックホールが発見された．回転していると言ってもナックルボールのようなでたらめな回転ではなく，1 つの軸を持っている軸対称解であり，回転速度は一定の定常解である．回転すると赤道面と北極や南極にあたる点では κ が違ってくると思われるかもしれないが，そうではない．これは

> **ブラックホール熱力学第零法則：**
> 定常なブラックホールにおいて κ は一定である．

と表現することができる．κ は定常なブラックホールであれば，時空の対称性を表す Killing 場 χ^μ を用いて

$$\nabla^\mu(\chi^\nu\chi_\nu) = -2\kappa\chi^\mu \tag{2.48}$$

と書ける．熱力学において，ある系が熱平衡であれば温度 T は一定である，というものに対応している．これだけだとやや唐突な感があるが，次の第一法則を見ればより深い類似に気付くであろう．これは地平面の面積を A として

> **ブラックホール熱力学第一法則：**
> 定常なブラックホールの微小変化を考えると
> $$dM = \frac{\kappa}{8\pi G}dA + \Omega dJ + \Phi dQ$$
> が成立する．

と書くことができ，基本的にはエネルギー保存則である．Ω, J, Φ はそれぞれブラックホールの角速度，角運動量，電磁ポテンシャルである．熱力学の第一法則が，系のエネルギーを E，エントロピーを S，圧力を P，体積を V として

$$dE = TdS - PdV$$

であるから，この段階で既に κ と熱力学の温度 T，A とエントロピー S の対応を暗示させる．実際，古典論の範囲では

> **ブラックホール熱力学第二法則：**
> 地平面面積 A は増大する．

ということがわかっている．ブラックホールなのだから，基本的にものをどんどん吸い込んでいって地平面は増大してゆくのである．また，単独のブラックホー

ルについてだけ言ってるのではなく，表面積 A_1，A_2 の 2 つのブラックホールが合体して表面積が A の 1 つのブラックホールになった場合には $A \geq A_1 + A_2$ が成り立つ．第一，第二法則を用いると次の結果を導くことができる．ブラックホールに入射する粒子のエネルギー，方位量子数，電荷の比を $\omega : m : e$ とすると第一法則から

$$dM(1 - m\Omega\omega^{-1} - e\Phi\omega^{-1}) = \frac{\kappa}{8\pi G}dA$$

であり，これと第二法則を用いると

$$\omega < m\Omega + e\Phi \tag{2.49}$$

であれば $dM < 0$ である．(2.49) は**超輻射** (superradiance) の条件として知られており，粒子はブラックホールによって散乱されるときに振幅を増し，逆にブラックホールはエネルギーを失う．最後に

ブラックホール熱力学第三法則：
有限の物理過程で表面重力 κ を零にできない．

も述べておく．これらと熱力学の対応を表 2.1 にしておく．

ブラックホール熱力学は dilaton 場や Yang–Mills 場などを入れた場合にも拡張することができる．解析的に求められており，9.3 節と関連する電磁場と dilaton 場 ϕ を伴う静的球対称ブラックホールは

$$ds^2 = -\lambda^2 dt^2 + \frac{1}{\lambda^2}dr^2 + R^2 d\Omega^2 \tag{2.50}$$

の座標系のもとで

$$e^{2\phi} = \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{2\alpha/(1+\alpha^2)} \tag{2.51}$$

$$\lambda^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{(1-\alpha^2)/(1+\alpha^2)} \tag{2.52}$$

$$R = r\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\alpha^2/(1+\alpha^2)} \tag{2.53}$$

と表せる．発見者のイニシャルを取って GM–GHS 解と呼ばれることもある[26]．

表 2.1　熱力学とブラックホール熱力学の対応．

	熱力学	ブラックホール
第零	熱平衡で $T =$ 一定	定常で $\kappa =$ 一定
第一	$dE = TdS - PdV$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi G}dA + \ldots$
第二	S 増大則	A 増大則
第三	有限の物理過程で T を零にできない	有限の物理過程で κ を零にできない

α は dilaton 場と電磁場の結合定数で，超弦理論の予言する値は $\alpha = 1$ である．また，

$$r_\pm = \frac{(1+\alpha^2)\left[GM \pm \sqrt{(GM)^2 - (1-\alpha^2)GQ^2}\right]}{1 \pm \alpha^2} \tag{2.54}$$

であり，M と Q はそれぞれブラックホールの質量及び電荷である．$\alpha = 0$ の場合は Reissner–Nordström 解に帰着することがわかる．

ここまで対応が付くと単なる類似を超えたものを感じさせる．実際，Hawking はブラックホール時空での場の量子論を考え，ブラックホールは熱的な輻射をし，表面重力 κ と結び付いた温度

$$T_{\rm BH} = \frac{\kappa}{2\pi} \tag{2.55}$$

を持つことを示した．この結果を元に第一法則を比較すると，ブラックホールのエントロピーを

$$S_{\rm BH} = \frac{A}{4G} \tag{2.56}$$

とみなせば両者は対応する．そうすると，熱力学が統計力学によって原理的に説明されたように，ブラックホール熱力学も統計力学的に説明されるのではないかと考えたくなる．これは量子重力理論が解決すべき課題として期待される（第 8 章）．

Schwarzschild ブラックホールでは (2.55) より，

$$T_{\rm BH} = \frac{1}{8\pi GM} \tag{2.57}$$

であり，太陽質量程度のブラックホールでは 10^{-7} K 程度であるから天文学的なサイズであれば無視できることを意味する．ただし，質量が軽くなるほど温度は高くなり，蒸発が進んで数式通り受け止めればブラックホールが消滅してしまう可能性もある．そうするとブラックホールが元々持っていた情報が失われてしまうわけであり，情報喪失の問題として知られている．しかし，温度公式の導出の際にはブラックホール時空そのものは固定しており，この問題の解決には量子重力理論を用いてどうなるかを考える必要がある（第 7 章）．ちなみに GM–GHS 解では

$$T_{\rm BH} = \frac{1}{4\pi r_+}\left(1 - \frac{r_-}{r_+}\right)^{\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}} \tag{2.58}$$

であり，超弦理論の予言する $\alpha = 1$ の場合は Schwarzschild ブラックホールと全く同じ表式になり，興味深い．

また，ブラックホール蒸発は一見すると炎の中に物を投げ込んだのと似てい

るが，これらは根本的に異なる．後者の場合，厳密には熱放射ではなく，原理的に燃えた物の微視的な情報を追跡できると考えられる．ブラックホールの場合には**地平面に落ちた情報**という条件があるため，同じことができるとすると因果律を破ってしまう．

ブラックホール蒸発の効果を考えるとブラックホール熱力学第二法則は修正され，

> **一般化されたブラックホール熱力学第二法則：**
> 全エントロピー $\frac{A}{4G} + S_m$ は増大する．

になると予想される．S_m は物質場のエントロピーである．表面積 A が減ってしまう一方で，外側にある物質場のエントロピーが増大するというのは自然な拡張に思える．また，数多くの状況証拠がこの拡張が正しいことを物語っている[27]．しかし，ブラックホール時空を固定する近似がよい状況に限らないと議論はできず，そうでない場合にはやはり量子重力理論を用いて考える必要があるだろう．

2.3.3　特異点定理

一様等方時空では $a(t) = 0$ にあたる宇宙初期（あるいは終末），Schwarzschild 解では中心 $r = 0$ においてスカラー曲率が発散しており，こうしたものを**特異点**と呼ぶ．特異 "点" というのは誤解を招く表現で，実際はこうしたものは時空多様体から取り除いて考えるのである．一言で言えば一般相対性理論で記述することを放棄した領域である．ブラックホールでは事象の地平面も特異点だと思いたくなるが，これは単に座標系の選び方の問題で，スカラー曲率は発散しておらず，また上で見たように表面重力 κ が発散するわけでもない．

ブラックホールと言っても，電荷の有無などによって時空構造には違いがある．時空構造を見るには無限遠方を有限な領域に圧縮して描いた Penrose 図を利用すると便利である．図 2.9 は Schwarzschild 解の Penrose 図である．光

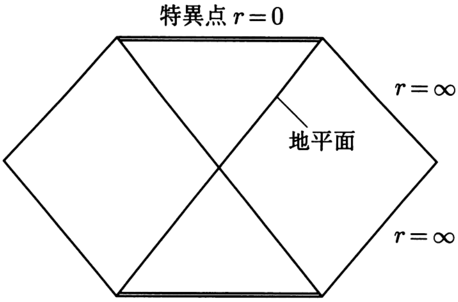


図 2.9　Schwarzschild 解の Penrose 図．

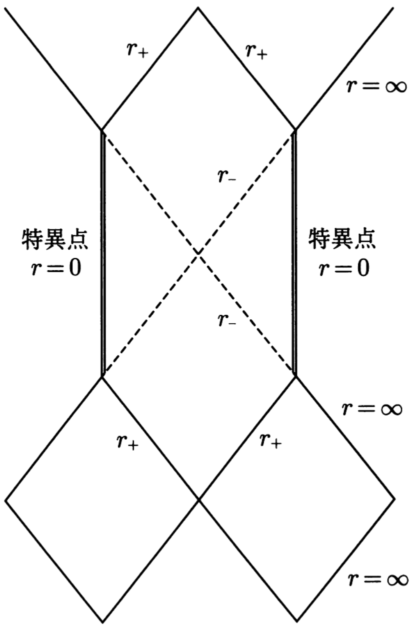


図 2.10　Reissner–Nordström ブラックホールの Penrose 図.

円錐と類似した部分があり，事象の地平面は図示した右上がりの斜め 45 度の線で表されている．特異点は水平の線で表されており，このような特異点を空間的特異点と呼ぶ．ただし，実際の重力崩壊によって生じた Schwarzschild ブラックホールの場合には右下がりの斜め 45 度の線より下の領域は存在しない．GM–GHS 解も $\alpha \neq 0$ の場合には同じ時空構造を持つ．

一方，Reissner–Nordström ブラックホール $(Q < \sqrt{G}M)$ の Penrose 図は図 2.10 であり，事象の地平面 r_+ の他に内部地平面 r_- を持ち，特異点は垂直の線で表されている．このような特異点を時間的特異点と呼ぶ．

しかし，上で見たような解は時空の対称性が非常に高い場合であるため，このような特異点は数学的な虚構であって，少し対称性を緩めると生じないのではないかと考えたくなる．このような一般論を議論しようと思えばトポロジーの手法が有効であり，曲率発散も実は一般的な特異点の定義ではない．詳細は専門書を参照されたい[4],[28]．そこから導き出された結果は深刻である．

1. 物質場のエネルギー条件,
2. 時空の大域的構造に関する条件

の少数の仮定を満たせば，ブラックホールや宇宙初期（あるいは終末）特異点は生じてしまう．時空の対称性を弱めたからと言って避けられるものではなかったのである．

この特異点が宇宙の誕生時であったり，地平面の中などに隠されている分には我々の日常生活を脅かすものではないが，そうではなくむき出しの状態，裸の特

異点がある場合には気味の悪いものがある．この裸の特異点を嫌う研究者達によって，特異点は地平面の中などに隠されているべきとする**宇宙検閲官仮説**も提唱された．これはブラックホール熱力学第三法則とも関連する．Reissner–Nordström 解であれば，第三法則の破れは有限の物理過程で極限ブラックホールにできることを意味する．これに少しでも電荷をつぎ込めば裸の特異点が生じる．ただし，この電磁場の系の場合には第三法則は証明されている[29]．

また，特異点定理の証明において物質場のエネルギー条件というものが一つの鍵になっていることには注目したい．これは量子論を考えると破れる可能性がある．また，特異“点”では微小な領域を扱っているため，重力についても量子論を適用すべきという見方ができる．特異点の解消ということも量子重力理論が解決すべき課題として期待される（第 5, 7 章）．従って，裸の特異点の是非に対しては別の見方もできる．裸の特異点というのは実際には量子重力理論を検証するチャンスであり，前向きに捉える見方である．現在ではこのような受け止め方をする研究者の方が多いのではないだろうか．

第 3 章
重力の正準形式と Wheeler–DeWitt 方程式

この章では次章以降のための準備段階として一般相対性理論を正準形式で書き直し，量子化しやすい形式にする．Hamiltonian 拘束条件を量子化して得られる方程式は Wheeler–DeWitt 方程式と呼ばれ，時間に依存しない方程式である．またこの方程式は，計量を基本変数としていたのでは非常に解きにくい．そのため，古典論の段階であらかじめ対称性を課したモデルで議論され，宇宙の生成を扱う理論として流行した．

3.1 重力の正準形式

一般相対性理論の作用を出発点として考える．

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}d^4x \ . \tag{3.1}$$

量子力学を適用しやすい形にするため，時空を次のように $(3+1)$ 分解する．

$$ds^2 = -N^2dt^2 + h_{ab}(dy^a + N^a dt)(dy^b + N^b dt) \ . \tag{3.2}$$

ただし，$(a, b = 1, 2, 3)$ は実空間の添字を意味する．N は**ラプス関数**，N^a は**シフトベクトル**と呼ばれる．また，n^μ を空間超曲面に垂直な単位ベクトルとする（図 3.1）．このとき，作用は次のように書き直すことができる（計算は付録 B 参照）．

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int dt \int (R^{(3)} + K^{ab}K_{ab} - K^2)N\sqrt{h}d^3y \ . \tag{3.3}$$

h は h_{ab} の行列式，$R^{(3)}$ は 3 次元スカラー曲率である．K_{ab} は**外部曲率**と呼ばれるもので，$\mathcal{L}_n$ を n^μ 方向への Lie 微分として $K_{ab} := \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{ab}$ と定義される．直感的には空間超曲面のたわみ具合を表すものである．K はこれを用いて $K := K_{ab}h^{ab}$ で定義される．正確には (3.3) は空間超曲面がコンパクトな場合であり，そうでない場合には表面項を加える必要があるが，ここでは (3.3) を

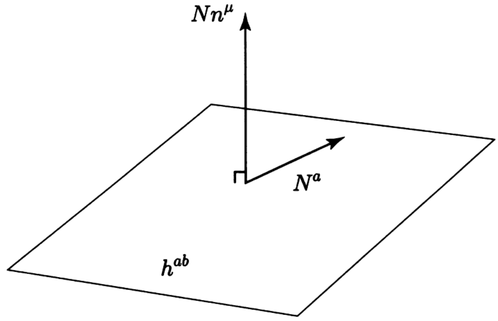


図 3.1　時空の $(3+1)$ 分解.

出発点として扱う[4]．また，以下では“時間方向”と“空間方向”が混在する場合には添字 μ,ν を用いて表す．このとき

$$h_\mu{}^\lambda n_\lambda = 0, \quad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad K_{\mu\nu} = h_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha n_\nu \tag{3.4}$$

と書けることに注意する．

量子化への準備段階として，Hamiltonian 形式に書き換える．一番単純な発想は，空間計量 h_{ab} を基本変数とすることである．“時間方向”を表すベクトルを

$$t^\mu := Nn^\mu + N^\mu \tag{3.5}$$

で定義し，t^μ 方向への Lie 微分を用いて

$$\dot{h}_{ab} := \mathcal{L}_t h_{ab} \tag{3.6}$$

と書くことにする．このときの共役運動量は，L を Lagrange 密度として

$$p^{ab} := \frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}(K^{ab} - Kh^{ab}) \tag{3.7}$$

である．これを導くには

$$\begin{aligned}
K_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(n^\alpha \nabla_\alpha h_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}\nabla_\nu n^\alpha + h_{\alpha\nu}\nabla_\mu n^\alpha\right) \\
&= \frac{1}{2N}\left(Nn^\alpha \nabla_\alpha h_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}N\nabla_\nu n^\alpha + h_{\alpha\nu}N\nabla_\mu n^\alpha\right) \\
&= \frac{1}{2N}\left[Nn^\alpha \nabla_\alpha h_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}\nabla_\nu (Nn^\alpha) + h_{\alpha\nu}\nabla_\mu (Nn^\alpha)\right] \\
&= \frac{1}{2N}\left[(t^\alpha - N^\alpha)\nabla_\alpha h_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}\nabla_\nu (t^\alpha - N^\alpha) + h_{\alpha\nu}\nabla_\mu (t^\alpha - N^\alpha)\right] \\
&= \frac{1}{2N}\left(\dot{h}_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\mu N_\nu - \tilde{\nabla}_\nu N_\mu\right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

を使う．2 行目から 3 行目では (3.4)，3 行目から 4 行目では (3.5)，4 行目から 5 行目では 4 次元時空の共変微分 ∇_α と空間の共変微分 $\tilde{\nabla}_\alpha$ の関係式 (B.1) を用いている．

(3.7) を用いた Poisson 代数は

$$\{h_{ab}(y), p^{cd}(y')\} = \delta_a^c \delta_b^d \delta(y - y') \tag{3.9}$$

である．ここで右辺 δ_a^c と δ_b^d は Kronecker のデルタで，$\delta(y-y')$ はデルタ関数である．通常，Poisson 代数にデルタ関数が出てくるのを避けるため，テスト関数 $f(y)$，$g(y)$ を導入する．

$$h_{ab}[f] := \int \sqrt{h} f(y) h_{ab}(y) d^3y\ ,\ \ p^{cd}[g] := \int \sqrt{h} g(y) p^{cd}(y) d^3y\ . \tag{3.10}$$

このようにしておけば

$$\{h_{ab}[f], p^{cd}[g]\} = \int \sqrt{h} \delta_a^c \delta_b^d f(y) g(y) d^3y \tag{3.11}$$

と書き直すことができるが，右辺に $\sqrt{h}$ が残っていることが問題である．背景時空依存性が必然的に入っているのである．

この状況は背景時空を固定しない場合は，場の理論でも全く同じである．例えば，質量のないスカラー場のラグランジュ密度は

$$\sqrt{h}(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\partial^a \phi \partial_a \phi) \tag{3.12}$$

なので，ϕ の共役運動量は $p_\phi := \sqrt{h}\dot{\phi}$．従って，

$$\phi[f] := \int \sqrt{h} f(y) \phi(y) d^3y\ ,\ \ p_\phi[g] := \int \sqrt{h} g(y) p_\phi(y) d^3y \tag{3.13}$$

から

$$\{\phi[f], p_\phi[g]\} = \int \sqrt{h} f(y) g(y) d^3y \tag{3.14}$$

であり，背景依存性が残る．通常は Minkowski 計量で固定するため，殆ど問題にはしないが，本当は $\sqrt{h}$ が残っている時点で問題である．

話を一般相対性理論の場合に戻し，Hamiltonian 密度 H_G を $H_G := \dot{h}_{ab}p^{ab} - L$ で定義する．このとき (3.7) を用いて

$$H_G = -\frac{1}{16\pi G}(HN + H_a N^a) \tag{3.15}$$

と書くことができる．ただし，

$$\begin{aligned} H &:= \sqrt{h}R^{(3)} - \frac{1}{\sqrt{h}}\left[p^{ab}p_{ab} - \frac{p^2}{2}\right], \\ H_a &:= 2\sqrt{h}\tilde{\nabla}_b(K_a^b - K\delta_a^b). \end{aligned} \tag{3.16}$$

$H = 0$ は **Hamiltonian 拘束条件**と呼ばれ，時間座標変換不変性を表す．また，$H_a = 0$ は**運動量拘束条件**と呼ばれ，空間的微分同相写像のもとでの不変性を表す．

量子化した場合には量子状態 Ψ に対する拘束条件 $\hat{H}\Psi = 0$ 及び $\hat{H}_a\Psi = 0$ が課されることになる．このうち $\hat{H}\Psi = 0$ は **Wheeler–DeWitt (WDW) 方程式**と呼ばれる．また，H_G は H_a と H の線形結合で表されるため，量子

化した方程式 $i\partial_t\Psi = \hat{H}_G\Psi = 0$ から，波動関数が時間に依存しないという特徴を持つ．この波動関数が宇宙を記述すると思えば，宇宙は時間発展しないのか？ という素朴な疑問がまず生じる．

この根本的な問題はループ量子重力理論でも残っているが，上で見たように計量を基本変数として量子化を考えると (3.11) から背景依存性を取り除かないといけないという問題が残る．また，計量などについて非多項式のため，量子化した場合の汎関数微分方程式を解くのは非常に困難である．次節では古典論の段階で一様等方性を課し，正の宇宙項 Λ を含めたモデルを解いてゆく．

3.2 Wheeler–DeWitt 方程式と量子宇宙論

ここでは正の宇宙項 Λ を含めて

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x \tag{3.17}$$

を出発点とする．この場合，閉じた一様等方宇宙の計量は

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\left(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2\right) \tag{3.18}$$

と表せる．Hamiltonian 拘束条件は $l = \sqrt{3/\Lambda}$ と置けば

$$\dot{a}^2 + 1 - a^2/l^2 = 0 \tag{3.19}$$

である．この解は de Sitter 時空

$$a(t) = l\cosh\left(\frac{t}{l}\right) \tag{3.20}$$

である．時刻 $t = 0$ で大きさ l から膨張を始めるという特徴を持つ．古典論だけで議論すると時刻 $t = 0$ で大きさ l を持っているという時点で「何故そんなものがパッと現れたのか」と思ってしまうかもしれないが，次のように量子論を元に考えた方がすっきりする．

a を基本変数とすると，その共役運動量 p_a は

$$p_a = -\frac{3\pi}{2G}\dot{a}a \tag{3.21}$$

である．これを用い，(3.19) を量子化して得られる WDW 方程式は

$$\left[-\frac{d^2}{da^2} + 2V(a)\right]\Psi = 0 \tag{3.22}$$

であり，次式で定義されるポテンシャル $V(a)$ を持つ Schrödinger 方程式と等価である．

$$V(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2\left(a^2 - \frac{a^4}{l^2}\right)\ . \tag{3.23}$$

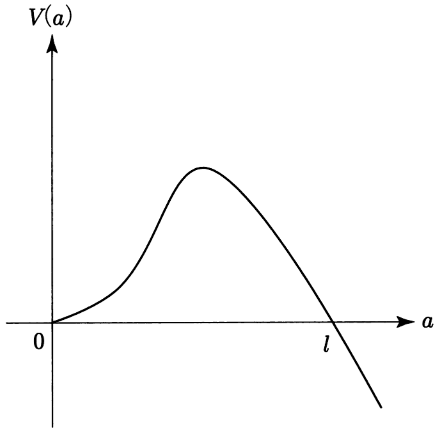


図 3.2　WDW 方程式のポテンシャル.

a の大きさと時間発展を対応させれば，元々の WDW 方程式になかった時間が現れることになる．$V(a)$ の様子は図 3.2 のように表すことができる．$0 < a < l$ の領域は古典論的には禁止されているが，量子論的には $a = 0$ から $a = l$ にトンネル効果によって遷移することが可能である．(3.20) で最初に 0 でない大きさであったのはトンネル効果で生まれたため，と解釈できる．

それではその遷移確率を考える．$t \to -i\tau$ のように Euclid 化し，このときの運動方程式の解に対する作用積分を S_E と書く．仮にインスタントンの議論が適用できるとすると遷移確率 P は

$$P = e^{-S_E} \tag{3.24}$$

で与えられる．(3.20) は

$$a(\tau) = l \cos\left(\frac{\tau}{l}\right) \tag{3.25}$$

のように変更される．これを (3.18) に代入すると

$$ds^2 = d\tau^2 + l^2 \cos^2\left(\frac{\tau}{l}\right)\left(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2\right) \tag{3.26}$$

なので，これは半径 l の 4 次元球 S^4 を表す．$\tau = 0$ から徐々に a が大きくなり，$a = l$ になった時点で de Sitter 解 (3.20) に遷移する様子を描いたものが図 3.3 である．

これが 1982 年 Vilenkin の考えた宇宙創生のシナリオで「無からの創生」として話題を呼んだ[30]．(3.26) から曲率は $R = 4\Lambda$，体積は $V = 8\pi^2 l^4/3$ なので，$S_E = -\frac{3\pi}{G\Lambda}$ である．従って遷移確率，即ち宇宙の創生確率は

$$P = \exp\left(\frac{3\pi}{G\Lambda}\right) \tag{3.27}$$

と求めることができる．

1983 年 Hartle と Hawking は経路積分を用いた定式化によって，より一般

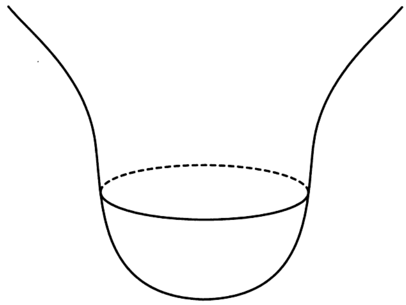


図 3.3 「無からの創生」シナリオ.

的な立場からこの問題を考えた[31]. 量子力学では初期状態 $|x_i, t_i\rangle$ から終状態 $\langle x_f, t_f|$ への遷移確率を

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i\rangle = \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} [dx] e^{iS} \tag{3.28}$$

と表すことができる. Euclid 化を考えると形式的に宇宙の波動関数を

$$\Psi = \int [dg] e^{-S_E} \tag{3.29}$$

と書くことができる. 量子力学では様々な経路について足し合わせを行うが, 宇宙においてはどのように考えればよいだろうか? Hartle と Hawking は図 3.3 の半球面だけでなく, 実時間 $t = 0$ との接続面（球を半分に切った断面に相当するところ）以外では境界を持たないコンパクトな時空 q について足し上げを行うべきとする, 次の**無境界境界条件**を提案した.

$$\Psi = \sum_q \int [dg] e^{-S_E} \ . \tag{3.30}$$

この場合, (3.26) からの寄与が最大となり,

$$P \simeq \exp\left(\frac{3\pi}{G\Lambda}\right) \tag{3.31}$$

が再現される.

図 3.4 は Hartle と Hawking の波動関数を模式的に示したものである. a が l よりも小さい場合は $\Psi \propto e^{a^2}$ のように指数関数的に増大するが, a が l よりも大きくなると振動する振る舞いを示す.

波動関数 (3.30) は S_E が下に有界でないという問題点を含んでいる. 実際には鞍点からの寄与が波動関数を決定するのが良い近似であるとして議論を進めている[32]. また, (3.31) だけ見ると $\Lambda \to \infty$ の極限で $P \to 0$ であり, Λ が大きければ創生確率は低いことを意味するように思える. これは Λ をポテン

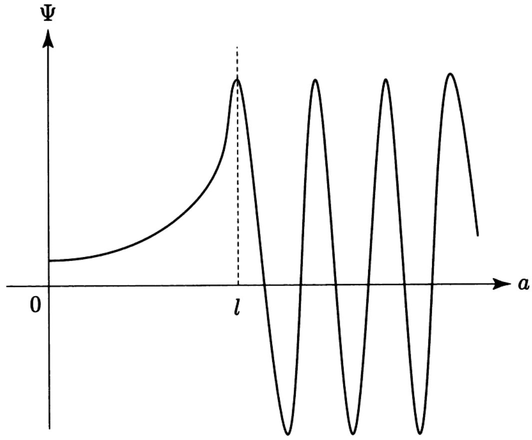


図 3.4　Hartle と Hawking の波動関数の振る舞い．

シャル $V(\phi)$ を持つスカラー場 ϕ に拡張して考えると解釈に困る．ϕ が極値付近で一定値を取るとした場合には $\Lambda = 8\pi G V(\phi)$ の宇宙項とみなすことができる．これを (3.30) に当てはめると，極値が複数ある場合には，宇宙初期には $V(\phi)$ が小さいところにいる確率ほど高いことを意味する．これを文字通り受け止めると，自然にはインフレーションに繋がりにくいことを意味する．

このような問題もあったため，1984 年 Vilenkin はトンネル遷移型波動関数というアイデアを提唱した[33]．粒子の運動との類推から $a > l$ では外向きの進行波を表す波動関数を選ぶべきという境界条件を置いた．(3.22) の独立な WKB 解は，$p := \sqrt{-2V(a)}$ として

$$\Psi_{\pm}^{(1)} = \exp\left[\pm i\int_{l}^{a} p(a)da \mp i\frac{\pi}{4}\right], \quad (a > l)$$
$$\Psi_{\pm}^{(2)} = \exp\left[\pm\int_{a}^{l} |p(a)|da\right], \quad (a < l)$$

である．上記の境界条件を取り入れ，$a = l$ で解を接続すると

$$\Psi^{(1)} = \Psi_{-}^{(1)}, \quad (a > l)$$
$$\Psi^{(2)} = \frac{i\Psi_{+}^{(2)} + \Psi_{-}^{(2)}}{\sqrt{2}}, \quad (a < l)$$

が得られる．従って $a = 0$ から l までのトンネル効果による遷移確率は

$$P = \left|\frac{\Psi^{(1)}(l)}{\Psi^{(2)}(0)}\right| = \exp\left[-2\int_{0}^{l} |p(a)|da\right] = \exp\left(-\frac{3\pi}{G\Lambda}\right) \quad (3.32)$$

であり，(3.31) の逆数になる．インフレーションシナリオとの整合性から言えばこちらの方が望ましいようにも見える．ただし，確率が大きいと言ってもそ

れが何を意味するのか曖昧であり，これは**人間原理**のような議論を生む．即ち，「宇宙創生を議論する人間が存在するためには，最初から宇宙は創生され，宇宙項を始めとするパラメーターが程よく調節されている」ということが前提としてある．条件付き確率であるから，$0 < P < 1$ であれば問題にはしないという立場である．この視点に立てば (3.31) と (3.32) の優劣を簡単には付けられない．一つの見方として興味深いが，科学としては受け入れがたい．第 2 章で取り上げた平坦性問題を思い出してみると，宇宙が臨界密度に非常に近くなければ我々は存在できないわけだが，これはインフレーションにより合理的に説明されたばかりか，そのインフレーションは検証されつつあると言ってよい．宇宙創生シナリオでもこのような状況が再現されることを期待したい．ちなみに「なぜ宇宙はこのようになっているのか？ それは宇宙について考える人間が存在しないといけないからだ」という論調で言うと登山家 George Mallory の言葉「なぜ山に登るのか？ そこに山があるからだ」と語感が似ているがこれらは全く違う*1)．

その後も Halliwell らによる複素計量を用いた経路積分の発散の除去[34]など，興味深い話はあるものの，上記の疑問の他に一般相対性理論からの期待「特異点は量子重力理論では解消されるのではないか」にも答えていないように見える．基本的には $a = 0$ から $a = l$ にトンネル効果によって遷移するという立場だが，$a = 0$ が特異点であると認めれば，ここでの波動関数は 0 だと考えるべきだろう．しかし，それでは宇宙が生成されないことになってしまう．また最初から一様等方を仮定していることも問題である．確率というものを議論することが仮に意味があるとしたら，まず一様等方時空を実現する確率は？ という段階から始めたい．これらのうち，特異点の問題についてはループ量子重力理論で取り組まれているものの，古典論で対称性を課さなければいけないという事情は変わっておらず課題は残している．

*1) 元々は「なぜエベレストに登るのか？ そこにエベレストがあるからだ」である．

第 4 章
ループ量子重力理論の定式化

ゲージ理論の非摂動論的な定式化としては格子ゲージ理論が知られており，一般相対性理論をこの形式が適用しやすいように書き換える．格子ゲージ理論においてホロノミー変数と，これを用いて定義される Wilson ループが重要な役割を果たす．一般相対性理論では，量子化した Hamiltonian 拘束条件が Wilson ループによって満たされる点は重要である．この Wilson ループそのものを解の基底とするには重複度の問題があり，この点を改良したスピンネットワーク基底を用いて面積や体積の離散化が議論される．

4.1 格子ゲージ理論との対応

ゲージ理論の場合，非摂動論的取り扱いをする処方箋として，格子ゲージ理論の手法が確立されている．その際に**ホロノミー変数**を用いるのが特徴である．重力理論も一種のゲージ理論とみなすことができるので，変数を適切に選んで同様な手法が使える形式に書き直す．

4.1.1 ホロノミー変数

ホロノミー変数という言葉は聞きなれないかもしれないが，イメージを掴むには電磁場の Aharonov–Bohm 効果を思い出してみればよい．電磁場の場合，経路 α についてのホロノミーは次式で定義される．

$$
\begin{aligned}
h(\alpha) &:= P\exp\left(\int_\alpha A_a dx^a\right) \\
&:= \lim_{N\to\infty}\prod_{k=0}^{N}\left[1 + A_a\left(x^a(k)\right)\Delta x^a(k)\right] . \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

$x^a(k)$ は α を N 個に分割して，経路順に並べた点である（図 4.1）．

図 4.2 のようにソレノイドを用意し，その内部に磁場を閉じ込める．点 A から点 F に向かう電子ビームを考え，途中に遮蔽物を置いて 2 つの経路 I, II に

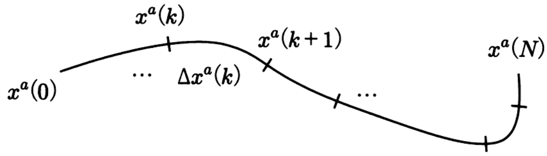


図 4.1　ホロノミーを定義する上での経路の分割.

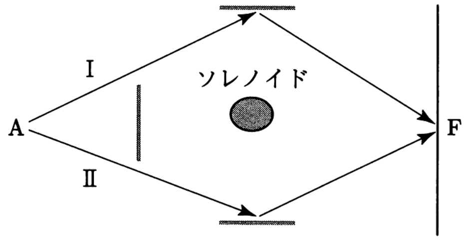


図 4.2　電子ビームの通る 2 つの経路.

分解し，反射鏡を用いて点 F に到達するようにする[35]．点 A における波動関数を Ψ_0 と書くと，I を通り点 F に到達した波動関数 Ψ_{I} は $\Psi_{\mathrm{I}} = h(\mathrm{I})\Psi_0$，II を通り点 F に到達した波動関数 Ψ_{II} は $\Psi_{\mathrm{II}} = h(\mathrm{II})\Psi_0$ のように書ける．元々の波動関数にホロノミーをかけるだけで波動関数の変化を表せることがまず重要である．

点 F における波動関数 Ψ は，上記の 2 つの経路を通った場合を考えて $\Psi = \Psi_{\mathrm{I}} + \Psi_{\mathrm{II}}$ と表せることに注意しよう．従って，Aharonov–Bohm 効果において重要となる，点 F における干渉項は $\mathrm{Re}\,(\Psi_{\mathrm{I}}^* \Psi_{\mathrm{II}})$ に比例する．そのため，位相差は $\oint A_a dx^a$ に比例し，これはソレノイドのつくる磁束に相当する．従って，経路 I, II では磁場がないにもかかわらず，波動関数は磁場を感じているというのが量子力学においては重要である．ここでは磁束を exp の肩にのせたものが閉曲線に関するホロノミーであり，比較的身近なところに登場しているという点を強調したい．

電磁場の場合は閉曲線に関するホロノミーを考えることでゲージ不変量が得られたが，非可換ゲージ理論の場合は一般にはゲージ不変量ではない．閉曲線に関するホロノミーのトレース積を取った **Wilson ループ**というものがゲージ不変量になる．

格子ゲージ理論では，Minkowski 時空で間隔 γ の格子を取り，図 4.3 (a) のようなマス目を一周させるホロノミー，Wilson ループを考える[40]．これによって全領域でのゲージ場の強さが与えられる．最後に $\gamma \to 0$ の極限を取ってパラメーター γ の依存性を消す．

一般相対性理論で同じことができるだろうか？ 出発点からして同じようにはいかない．Minkowski 時空などの時空構造を用意するわけにはいかないためである．そこで多様体だけは用意し，ホロノミーを用いて時空構造を決定するというアプローチを試みる．そのため，一定 “間隔” の格子を用意するという

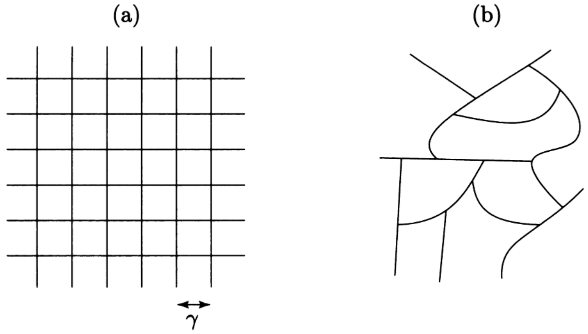


図 4.3 (a) Minkowski 時空. (b) 多様体におけるホロノミーの概念図.

言い方はできないが, Planck スケール γ 程度の広がりを持つ閉曲線でホロノミーを考えるというイメージはできる. 図 4.3 (b) には参考のため, ループ量子重力理論の場合の概念図を描いたが, 本来は多様体上の閉曲線を絵で描くこと自体適切ではない. 後に述べる運動量拘束条件の要請からホロノミーの連続変形が許され, その同値類を考えた場合の概念図である. また, 格子ゲージ理論と異なり, $\gamma \to 0$ の極限は取らない. これは, 接続そのものを演算子化するのは数学的な問題があることとも関連している[36], [37]. 逆に $\gamma \neq 0$ であることを時空に備わっている本質的な離散性とみなすのがループ量子重力理論の考え方である.

4.1.2 変数の書き換え

まず一般相対性理論の基本変数を, 計量からゲージ理論のポテンシャルに対応するものに移したい. 発想の元はゲージ理論の共変微分 $D\Psi = (\partial + iA)\Psi$ である. 一般相対性理論では, ベクトル場 t^ν に対して

$$\nabla_\mu t^\nu = \partial_\mu t^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} t^\lambda \tag{4.2}$$

のような共変微分があるが, Christoffel 記号 $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ は取る座標に依存したものである. これを統一的に扱い, ゲージ理論の書き方に近づけるため, 四脚場 e^Γ_μ を

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\Gamma\Delta} e^\Gamma_\mu e^\Delta_\nu \tag{4.3}$$

のように導入する. $\Gamma, \Delta = 0, 1, 2, 3$ であり, 局所慣性系に関する添字である. $\eta_{\Gamma\Delta}$ は Minkowski 計量であり, 時空の各点に e^Γ_μ を局所 Lorentz 枠とする内部空間が張り付いていると考える. スピン接続 ${\omega_\mu}^{\Gamma\Delta} := e^\Gamma_\nu \nabla_\mu e^{\Delta\nu}$ を導入すると, $t_\nu = e^\Gamma_\nu t_\Gamma$ と書いたとき, 内部空間の脚に対する共変微分

$$D_\mu t_\Gamma = \partial_\mu t_\Gamma + {\omega_{\mu\Gamma}}^\Delta t_\Delta \tag{4.4}$$

が定められる. 内部空間の添字に対しては反対称 ${\omega_\mu}^{\Gamma\Delta} = -{\omega_\mu}^{\Delta\Gamma}$ のため, 独立な自由度は 6 つである. これは

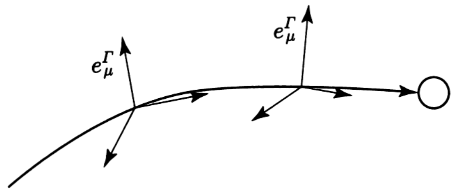


図 4.4　時空の各点における四脚場の張り替え．

$$
\begin{aligned}
\omega_\mu{}^{\Gamma\Delta} &= e_\nu^\Gamma \nabla_\mu e^{\Delta\nu} = \nabla_\mu (e_\nu^\Gamma e^{\Delta\nu}) - e^{\Delta\nu}\nabla_\mu e_\nu^\Gamma \\
&= \nabla_\mu \eta^{\Gamma\Delta} - e^{\Delta\nu}\nabla_\mu e_\nu^\Gamma = -\omega_\mu{}^{\Delta\Gamma}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

のように示すことができる．$\omega_\mu{}^{\Gamma\Delta}$ は局所慣性系におけるベクトル場 t_Γ の共変微分に対して Christoffel 記号と同じ役割を持っている．時空の各点で四脚場を張り替えないといけないために，このような項が生じる（図 4.4）．ただし，局所慣性系に固定したことでゲージ理論の書き方に随分近づいたわけである．

双対変換

$$
*\omega_\mu{}^{\Delta\Gamma} := \frac{1}{2}\epsilon^{\Delta\Gamma\Sigma\Lambda}\omega_\mu{}^{\Sigma\Lambda} \tag{4.6}
$$

を導入する．このとき

$$
{}^{\pm}\omega_\mu{}^{\Delta\Gamma} := \frac{1}{2}(\omega_\mu{}^{\Delta\Gamma} \mp i * \omega_\mu{}^{\Delta\Gamma}) \tag{4.7}
$$

で定義される ${}^{+}\omega_\mu{}^{\Delta\Gamma}$，${}^{-}\omega_\mu{}^{\Delta\Gamma}$ は双対変換の固有状態で，固有値はそれぞれ $+i$，$-i$ である．これらはそれぞれ**自己双対接続**，反自己双対接続と呼ばれる．

自己双対接続の空間成分を用いて **Ashtekar 接続**は

$$
A_a^I := 2i\,{}^{+}\omega_a{}^{0I} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJK}\omega_a{}^{JK} + i\omega_a{}^{0I} \tag{4.8}
$$

と定義される．$a = 1,2,3$ は実空間の添字，$I, J, K = 1,2,3$ は内部空間の添字を表す．これを基本変数と考えることで拘束条件は非常に簡略化されるが，この事情については後で説明する．

i のかかる項は Lorentz ブースト，かからない項は空間回転 $SO(3)$ を表す．外部曲率 K_{ab} を用いて

$$
K_a^I := K_{ab}e^{bI} \tag{4.9}
$$

を定義すると，これは $K_a^I = -\omega_a{}^{0I}$ のように Lorentz ブーストを表す．また，

$$
\Gamma_a^I := \frac{1}{2}\epsilon^{IJK}\omega_a{}^{JK} \tag{4.10}
$$

と置くことで

$$A_a^I = \Gamma_a^I - iK_a^I \tag{4.11}$$

と書き直すことができる．Γ_a^I と e_a^I は Cartan の構造方程式

$$\partial_{[a}e_{b]}^I + \epsilon^{IJK}\Gamma_{[a}^J e_{b]}^K = 0 \tag{4.12}$$

で結ばれている．$[ab]$ は反対称部分を表す．即ち

$$\partial_{[a}e_{b]}^I := \frac{1}{2}(\partial_a e_b^I - \partial_b e_a^I)\ . \tag{4.13}$$

このとき，四脚場 e_μ^Γ の内部空間の変換は SO(3) 行列 $O^I{}_J$ を用いて

$$\bar{e}^I = O^I{}_J e^J \tag{4.14}$$

と表すことができる．Ashtekar 接続は $\mathcal{A}_a^{IJ} := \epsilon^{IJK}A_a^K$ と書き，内部空間添字に注目して行列とみなした場合

$$\mathcal{A}' = O\mathcal{A}O^{-1} + dOO^{-1} \tag{4.15}$$

のようにゲージポテンシャルと同じように変換する．Lie 代数のみを問題にすれば複素 SU(2) ゲージ理論のように扱える．共役な運動量は

$$E_I^a = \sqrt{h}e_I^a \tag{4.16}$$

を用いて

$$\tilde{A}_I^a = -\frac{E_I^a}{8\pi iG} \tag{4.17}$$

と書ける．これを導くには (3.7) から

$$p^{ab}h_{ab} = -\frac{K\sqrt{h}}{8\pi G} = i\tilde{A}_I^a K_a^I \tag{4.18}$$

及び (4.11) を用いればよい．Poisson 代数は

$$\left\{\tilde{A}_I^a(x), A_b^J(y)\right\} = \delta_b^a\delta_I^J\delta(x-y) \tag{4.19}$$

である．ゲージ変数を用いる場合，E_I^a の 9 自由度と h^{ab} の 6 自由度の違いを埋め合わせる必要があり，この違いは内部自由度の回転自由度に起因する．この余分な**ゲージ拘束条件**は外部曲率の対称性 $K_{[ab]} = 0$ から導くことができ，

$$\epsilon_{IJK}E_J^a K_a^K = 0 \tag{4.20}$$

と表せる．これは Cartan の構造方程式 (4.12) を用いて

$$D_a E_I^a := \partial_a E_I^a + \epsilon_{IJK}A_a^J E_K^a = 0 \tag{4.21}$$

と書き直すことができ，こちらをゲージ拘束条件と呼ぶのが一般的である．この方が Gauss の法則と対応していることがわかりやすいためと思われる．ま

た，これ以外の運動量拘束条件，Hamiltonian 拘束条件は

$$F^I_{ab}E^a_I = 0\ , \tag{4.22}$$
$$\epsilon^{IJK}F^I_{ab}E^a_J E^b_K = 0 \tag{4.23}$$

と書き直すことができる．F^I_{ab} は A^I_a に関する場の強さで

$$F^I_{ab} := 2\partial_{[a}A^I_{b]} + \epsilon_{ILM}A^L_a A^M_b \tag{4.24}$$

と定義される．いずれの拘束条件も単純な形になり，解ける見込みが出てくる．これらの導出は 4.2 節の実接続の場合を含め，付録 B で行う．

4.1.3 量子化と Wilson ループ

これらを基本変数として量子化し，拘束条件を波動関数 Ψ にかかる演算子として扱うと

$$D_a\frac{\delta\Psi}{\delta A^I_a} = 0,\quad F^I_{ab}\frac{\delta\Psi}{\delta A^I_b} = 0, \tag{4.25}$$
$$\epsilon^{IJK}F^I_{ab}\frac{\delta}{\delta A^J_a}\frac{\delta}{\delta A^K_b}\Psi = 0 \tag{4.26}$$

のように表すことができ，ここでは演算子順序としては F^I_{ab} が $\frac{\delta}{\delta A^K_b}$ の左側に現れるように選んだ．実際にはゲージ拘束条件は順序を入れ替えても等価であるが，Hamiltonian 拘束条件はそうではないことに注意する必要がある．

運動量拘束条件については，次のような正則化を考えることで演算子順序によらなくなることが示された[38]．$\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x-y) = \delta(x-y)$ として

$$C(N^a) = \lim_{\epsilon\to 0}\int d^3x d^3y N^a f_\epsilon(x-y)\frac{\delta}{\delta A^I_b}F^I_{ab} \tag{4.27}$$

を考える．N^a はシフトベクトルである．この順序のとき，F^I_{ab} の中で A^I_a の線形項の部分については $\int d^3x d^3y N^a f_\epsilon(x-y)\partial_b\delta(x-y)$ という寄与が生じる．しかし，$f_\epsilon(x-y) = f_\epsilon(y-x)$ という対称性があればこの項は消え，この性質を仮定する．また，F^I_{ab} の中で A^I_a の非線形項の部分から生じる寄与については ϵ^{IJK} の反対称性により消える．このため，(4.25) の演算子順序の場合と結果は変わらない．

拘束条件を解くことを考える．ゲージ拘束条件から量子状態 Ψ としてゲージ不変な汎関数を考えるべきである．このような汎関数の候補として Ashtekar 変数からつくった Wilson ループがある．これは閉曲線 α に関するホロノミー

$$\begin{aligned} h(\alpha) &:= P\exp\left(\oint_\alpha A^I_a\tau^I dx^a\right) \\ &:= \lim_{N\to\infty}\prod_{k=0}^{N}\left(1 + A^I_a(x^a(k))\tau^I\Delta x^a(k)\right) \end{aligned} \tag{4.28}$$

(τ^I は su(2)Lie 代数の生成子で，$j = 1/2$ 表現の場合は Pauli 行列 σ^I を用いて $\tau^I = -\frac{i}{2}\sigma^I$ と書ける）を用いて

$$W(A, \alpha) := \mathrm{Tr}\,[h(\alpha)] \tag{4.29}$$

で定義される．また，3.1 節で述べた Poisson 代数にデルタ関数と背景依存性が入ってくる問題は，A_a^I に関してはホロノミーを用い，E_I^a に関しては**フラックス**

$$F_S(E) = \int_S E_I^a \tau^I n_a d^2 y \tag{4.30}$$

を用いることで解決できる．n_a は 2 次元面 S に対する法線ベクトルである．この正則化の方法は微分同相写像不変性を満たすという長所を持つ[39]．

Wilson ループは閉曲線に kink や交点がなければ上記演算子順序の Hamiltonian 拘束条件を満たし，これは歴史上初めて見つかった非自明な解である．

これは次の手順で計算される[40]．

(i) 曲線 α の始点を o，終点を o' とし，開いた経路のホロノミー $h(\alpha_o^{o'})$ $(o \neq o')$ に $\frac{\delta}{\delta A_a^J}\frac{\delta}{\delta A_b^K}$ を作用させる．このような持って回ったことをする理由は，2 番目の微分を作用させる際の不定性を取り除くためである．
(ii) $o = o'$ とし，トレースを取って Wilson ループをつくる．その結果，添字 J と K に対して対称であることがわかるが，この後作用させる $\epsilon^{IJK} F_{ab}^I$ は J と K に対して反対称のため，結果は 0 になる．

(i) の段階を計算しよう．

$$\frac{\delta}{\delta A_b^K(x)} h(\alpha_o^{o'}) = \int_\alpha dy^b \delta(x-y) h(\alpha_o^y) \tau^K h(\alpha_y^{o'}) \tag{4.31}$$

である．同様に

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta A_a^J(x)} \frac{\delta}{\delta A_b^K(x)} h(\alpha_o^{o'}) = \\
&\int_\alpha dy^b \left[\int_{\alpha_o^y} dz^a \delta(x-y)\delta(x-z) h(\alpha_o^z) \tau^J h(\alpha_z^y) \tau^K h(\alpha_y^{o'}) \right. \\
&\left. + \int_{\alpha_y^{o'}} dz^a \delta(x-y)\delta(x-z) h(\alpha_o^y) \tau^K h(\alpha_y^z) \tau^J h(\alpha_z^{o'}) \right]
\end{aligned} \tag{4.32}$$

であり，o から y の途中に z がある場合と y から o' の途中に z がある場合の和で書ける（図 4.5）．

従って，(ii) の最初の段階は

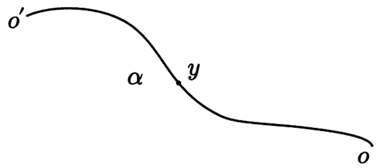


図 4.5　曲線 α の経路．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta A_a^J(x)}\frac{\delta}{\delta A_b^K(x)}W(\alpha)= \\
&\oint_\alpha dy^b\left[\int_{\alpha_o^y} dz^a \delta(x-y)\delta(x-z)\mathrm{Tr}\left(\tau^J h(\alpha_z^y)\tau^K h(\alpha_y^{zo})\right)\right. \\
&\left.+\int_{\alpha_y^o} dz^a \delta(x-y)\delta(x-z)\mathrm{Tr}\left(\tau^K h(\alpha_y^z)\tau^J h(\alpha_z^{yo})\right)\right] \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

と計算できる．$o = o'$ と取ったため，ホロノミーの順序を入れ替えて $h(\alpha_o^z)h(\alpha_y^o) =: h(\alpha_y^{zo})$ のように計算している．$h(\alpha_y^{zo})$ は y から基点 o を通って z に至る経路を表す（図 4.6）．

もしループに kink や交点がなければ $h(\alpha_y^z)$ 等，基点 o を経由しない経路はデルタ関数によって 1 点に縮められるので，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta A_a^J(x)}\frac{\delta}{\delta A_b^K(x)}W(\alpha)= \\
&\oint_\alpha dy^b\left[\int_{\alpha_o^y} dz^a \delta(x-y)\delta(x-z)\mathrm{Tr}\left(\tau^J \tau^K h(\alpha_y^{zo})\right)\right. \\
&\left.+\int_{\alpha_y^o} dz^a \delta(x-y)\delta(x-z)\mathrm{Tr}\left(\tau^K \tau^J h(\alpha_z^{yo})\right)\right]. \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

従って，添字 J と K に対して対称であることがわかるが，この後作用させる $\epsilon^{IJK}F_{ab}^I$ は J と K に対して反対称のため，結果は 0 になる．これは正則化を考えず，単純化した議論ではあるが，厳密な議論でも本質は変わらない．

一方，運動量拘束条件を Wilson ループに作用させると，曲線の連続変形を表すので，0 にはならない．従って，Wilson ループ自体は運動量拘束条件を満た

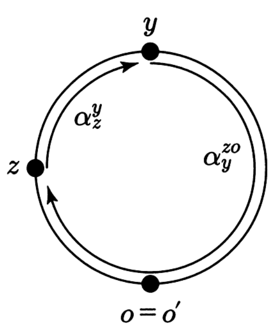


図 4.6　閉曲線における α_z^y と α_y^{zo} の定義．

さないが，この連続変形は**結び目理論**における **Reidemeister 変形**で定義することができる（付録 A）．この連続変形の同値類，結び目理論の不変量 **s-knot 状態**を用いて全ての拘束条件を満たす解をつくることができる．

こうして様々なループ α を考えることでどの程度ゲージ場の情報を引き出せるのだろうか．これは重要な点で**ゲージ不変な汎関数は Wilson ループの組み合わせで表せる**ため，次のループ表示の波動関数あるいはその和を使って全ての拘束条件を満たそうというのが基本的な発想である[40]．

$$\Psi(\alpha) := \int dAW(A,\alpha)\Psi(A) \ . \tag{4.35}$$

物理量演算子 $\hat{P}$ の作用は

$$\begin{aligned}\hat{P}\Psi(\alpha) \ &:= \int dAW(A,\alpha)\hat{P}\Psi(A) \\ &= \int dA\hat{P}^{*}W(A,\alpha)\Psi(A)\end{aligned} \tag{4.36}$$

で定義される．$\hat{P}^{*}$ は $\hat{P}$ とは逆の演算子順序である．

上記の Wilson ループの性質から，Rovelli と Smolin によって次のような波動関数 $\Psi_U(\alpha)$ を定義することが提唱された[41]．

$$\Psi_U(\alpha) := \begin{cases} \Psi(\alpha) & \alpha \text{が kink や交点を持たないとき} \\ 0 & \alpha \text{が kink や交点を持つとき} \end{cases} \tag{4.37}$$

このように定義すれば，ループの選び方によらず Hamiltonian 拘束条件を満たすという良い性質を持つ．しかし，実際には任意の行列 C, D について成り立つ

$$\mathrm{Tr}(CD) = \mathrm{Tr}(DC)$$

及び $C, D \in SL(2, \mathbf{C})$ について成り立つ

$$\mathrm{Tr}(C)\mathrm{Tr}(D) - \mathrm{Tr}(CD) - \mathrm{Tr}(CD^{-1}) = 0$$

という恒等式のために実はこのような $\Psi_U(\alpha)$ は恒等的に 0 であることが言えてしまう[42]．

この C, D として，それぞれループ α, β についてのホロノミーを考えれば，

$$W(\alpha\beta) = W(\beta\alpha) \ , \quad W(\alpha\cup\beta) - W(\alpha\beta) - W(\alpha\beta^{-1}) = 0 \ . \tag{4.38}$$

ここで，$W(\alpha\cup\beta) := W(\alpha)W(\beta)$ である．(4.38) の右側の式から

$$\begin{aligned}\Psi_U(\alpha\beta\cup\mu) &= \Psi_U(\alpha\beta)\Psi_U(\mu) = \Psi_U(\alpha\beta\mu) + \Psi_U(\alpha\beta\mu^{-1}) \ , \\ \Psi_U(\beta\alpha\cup\mu) &= \Psi_U(\beta\alpha)\Psi_U(\mu) = \Psi_U(\beta\alpha\mu) + \Psi_U(\beta\alpha\mu^{-1}) \ .\end{aligned}$$

2 つの式の左辺は (4.38) の左側の式から等しいことがわかるので，右辺同士も

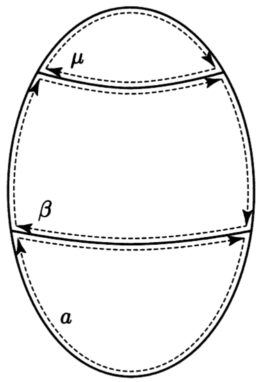


図 4.7

等しく,

$$\Psi_U(\alpha\beta\mu) + \Psi_U(\alpha\beta\mu^{-1}) = \Psi_U(\beta\alpha\mu) + \Psi_U(\beta\alpha\mu^{-1}) \tag{4.39}$$

である．これを図 4.7 のような閉曲線 α, β, μ に対して適用すると，曲線 $\alpha\beta\mu$ から得られるホロノミーの寄与は，kink や交点を持たない楕円を 1 周させる曲線 ν のホロノミーとして表せる．一方で，左辺 1 項目以外は kink や交点を持つため，定義により 0 である．結果として左辺 1 項目も $\Psi_U(\alpha\beta\mu) = \Psi_U(\nu) = 0$ となる．一見すると上手いアイデアであったが，恒等式 (4.38) のために，殆ど自明な結果が得られるだけであった．この点については後に振り返る．

4.2 実接続と演算子

Ashtekar 接続を用いた Wilson ループは Hamiltonian 拘束条件を満たすという非常に良い面を持つ一方，物理量の実数性を課すことは殆どできなかった．このため，**Barbero–Immirzi (BI)** パラメーターと呼ばれる実数のパラメーター γ を用いて，

$$A_a^I := \Gamma_a^I + \gamma K_a^I \tag{4.40}$$

を用いるのが主流になった[43]．以下ではこの**実接続**を用いて考える．まず，後への準備も兼ねて Hamiltonian 拘束条件

$$C_{\text{grav}} = -\int_{\nu} d^3x \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G}\left(R^{(3)} - K_{ab}K^{ab} + K^2\right) \tag{4.41}$$

を書き換える．空間 3 次元の基本セル ν を導入し，体積積分が発散しないようにしている[36]．これは次のように書き直すことができる．

$$C_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi G}\int_{\nu} d^3x \frac{N}{\sqrt{|E|}} \times \left[\epsilon^{IJK} F^I_{ab} E^a_J E^b_K - 2(1+\gamma^2) K^I_{[a} K^J_{b]} E^a_I E^b_J\right] . \tag{4.42}$$

$E = \det\ E^a_I$ である．(4.42) から $\gamma = \pm i$ のとき，拘束条件が簡単になることがわかる．この計算は付録 B にまとめる．

4.2.1 準古典極限の問題

一般相対性理論では計量を元に曲率や Einstein 方程式を考えてゆく．そのため，計量を演算子化してその固有値はどうなるのかを問うのは自然な流れである．皮肉なことに基本変数をホロノミーとすると，計量を求めるのは逆に難しくなってしまうのである．ただし，元々計量は座標に依存した量なので，観測可能量 (observable) でないことは注意しておく．

空間計量は

$$hh^{ab} = E^a_I E^b_I \tag{4.43}$$

と表せるので，これを演算子にした $(8\pi\gamma G)^2 \frac{\delta}{\delta A^I_a}\frac{\delta}{\delta A^I_b}$ の $W(A,\alpha)$ への作用を考えるのだが，ループ α に接する方向にのみデルタ関数が現れ，それ以外では 0 である．少し語弊のある表現だが，ループ量子重力理論における真空に相当するものは縮退した計量であり，$W(A,\alpha)$ は**縮退した計量からの励起状態**を与え，これらの重ね合わせで励起状態として Minkowski 時空その他を考えるという言い方ができる．この発想自体が聞きなれないことと思われる．また，Minkowski 時空などを構築することも難問で，**準古典極限の問題**と呼ばれる．

計量を表すものとして，正則化に対してきちんと定義される演算子が提唱されている[44]．

$$Q(w) = \int d^3x \sqrt{w_a w_b E^a_I E^b_I} \tag{4.44}$$

がその古典論版，w は任意の滑らかな 1-form である．(4.34) と似た計算をすればよい．簡単のため，$j = 1/2$ 表現を考えて

$$\sum_I (\tau^I)^2 = -\frac{3}{4}\mathbf{I} \tag{4.45}$$

（ただし，$\mathbf{I}$ は 2×2 単位行列）を使うと

$$w_a(x)w_b(x)\frac{\delta}{\delta A^I_a(x)}\frac{\delta}{\delta A^I_b(x)}W(\alpha) = \oint_\alpha dy^b \oint_\alpha dz^a \frac{3}{4}\delta(x-y)\delta(x-z) w_a(x) w_b(x) W(\alpha) \tag{4.46}$$

が得られる．従って

$$\hat{Q}(w)\Psi(\alpha) = 4\pi\sqrt{3}\gamma G \oint_\alpha |dx^a w_a(x)|\Psi(\alpha)\ . \tag{4.47}$$

上記の演算子を用いて Minkowski 時空

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{4.48}$$

の計量を模倣する波動関数を求める[45]．このときは

$$E^a_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

で，演算子を作用させた結果として得られる $4\pi\sqrt{3}\gamma G \oint_\alpha |dx^a w_a(x)|$ が，古典的な (4.44) からの $\int d^3x w_a E^a_I(x)$ と等しい波動関数を求めるのである．様々な方法があるが，α を 3 つの要素 $\Delta^a_I(s)$（$I = 1, 2, 3$，s はパラメーター）に分割し，E^a_I と対応させる方法を述べる．

まず $I = 1$ のケースに着目する．

$$4\pi\sqrt{3}\gamma G \oint_{\Delta^a_1} ds\dot{\Delta}^a_1 w_a = \int d^3x w_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ . \tag{4.50}$$

ここで，$\dot{} = d/ds$ である．$\dot{\Delta}^a_1$ には y, z 成分が必要ないことがわかる．そこで

$$\Delta^a_1(s) = \sum_{n_1, n_2} \begin{pmatrix} s \\ n_1\delta_1 \\ n_2\delta_2 \end{pmatrix}$$

と置く．n_1, n_2 は整数である．x 方向に伸びる "棒" が y，z 方向にそれぞれ δ_1，δ_2 の間隔で並んでいる様子を想像すればよい（図 4.8）．

n_1, n_2 を連続変数のように考えて (4.50) の右辺を $(x, y, z) \to (s, n_1, n_2)$ に変数変換すると

$$\delta_1\delta_2 \sum_{n_1, n_2} \int_{-\infty}^{\infty} ds w_a(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

で，(4.50) が満たされるには $\delta_1\delta_2 = 4\pi\sqrt{3}\gamma G$ である．$I = 2, 3$ の場合はそれぞれ y, z 方向に伸びている "棒" を想像すればよく，Planck スケール間隔の格子的な描像が得られる．これ以外でも様々な時空について同様な考察がなされている．

こう書くとある程度は描像ができていると思われるかもしれないが，問題点は色々ある．例えば平坦な時空には特別な方向がないはずだが，今の描像では

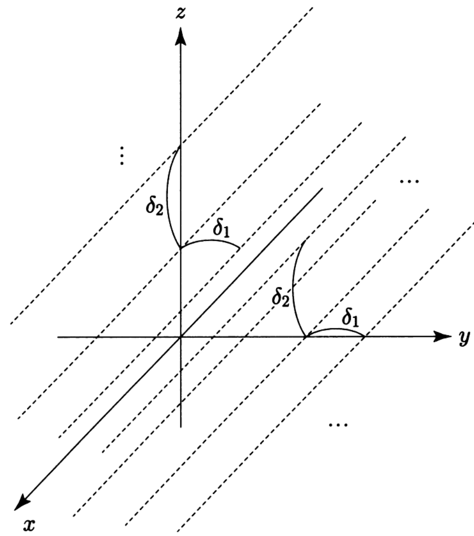


図 4.8　x 方向に伸びる "棒" が y, z 方向にそれぞれ δ_1, δ_2 の間隔で並ぶ様子.

x, y, z という特別な方向をつくってしまっている．そのため，様々な方向を向いた格子をたくさん用意してその平均を取る操作をする等の試みがある[46].

4.2.2　面積公式とスピンネットワーク

面積は古典論では

$$A(\Delta) = \int_\Delta d^2\sigma \sqrt{h^{(2)}} \tag{4.52}$$

のように書ける．$h^{(2)}$ は 2 次元面 Δ 上の計量の行列式である．これを E^a_I を用いて書き直すと，

$$A(\Delta) = \int_\Delta d^2\sigma \sqrt{E^a_I E^b_I n_a n_b}\ . \tag{4.53}$$

n_a は Δ に対する法線ベクトルである．量子論では $\hat{Q}$ と同様に (4.46) の計算をする必要があるが，面積の場合は積分が 2 次元面なので，最終的に

$$\hat{A}(\Delta)\Psi(\alpha) = 4\pi\sqrt{3}\gamma G(\alpha と \Delta の交点数)\Psi \tag{4.54}$$

のように書ける．複数のループを考える場合には，単純に交点数の和を考えればよいと思うかもしれない．しかし，実際には (4.38) のために無関係と思われるループ同士が関係してしまう．これと任意の経路 χ に関する恒等式 $W(\alpha\chi\chi^{-1}) = W(\alpha)$ を組み合わせ，波動関数の形 (4.35) を用いると

$$\Psi(\alpha \cup \beta) - \Psi(\alpha\chi\beta\chi^{-1}) - \Psi(\alpha\chi\beta^{-1}\chi^{-1}) = 0 \tag{4.55}$$

を得る．これは模式的に図 4.9 のように書け，これら 3 つが独立ではないことを示している．そのため，独立な基底を取り出す必要がある．次のように選ん

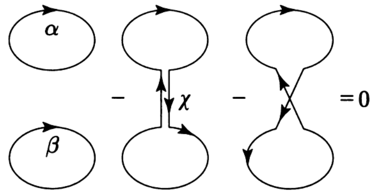


図 4.9　ループ同士の間で成立する恒等式.

だものはスピンネットワーク基底と呼ばれる[47].

$$\Psi_s := \sum_m (-1)^{c(m)}(-1)^{n(m)}\Psi_m \ . \tag{4.56}$$

Ψ_m は図 4.9 で表される個々のものに対応しており，任意個数のループとそれらを結ぶ経路から成る．$c(m), n(m)$ はそれぞれループの向きの交換の数，ループの数を表す．例えば $\Psi(\alpha\cup\beta)$ ならループの数は 2，交換は 0，$\Psi(\alpha\chi\beta^{-1}\chi^{-1})$ ならループの数は 1，交換は 1 である．

Ψ_s を表現するため，**スピンネットワーク**という表記法を与える．図 4.10 のように円とそれらを結ぶ線を書き，ループあるいは経路の重複度を表す数字を横に書く．これらの線と交点は総称してそれぞれ**リンク**，**ノード**と呼ばれている．例えば図 4.10 の左上では円を結ぶ線の重複度は 2 であり，円の結び方には右辺のように 2 つあるループを順方向，逆方向に繋げる方法がある．これに応じて $c(m), n(m)$ が求まる．左下の場合も同様であり，この図の左辺で定義される 2 つは図 4.9 と対比すると確かに独立なものになっている．ここで注意が必要だが，線に対して重複度 1 を付けたものは，もともとの恒等式にないた

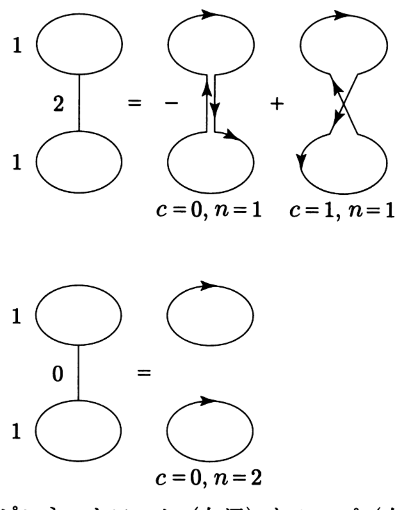


図 4.10　スピンネットワーク（左辺）とループ（右辺）の関係.

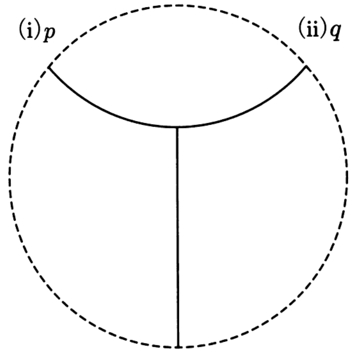


図 4.11　ノード周辺とループの重複度 p, q, r.

め，現れない．

この重複度を制限するルールを考える．図 4.11 はノード周辺を拡大した図で，(i) (ii) (iii) に対応するループの重複度をそれぞれ p, q, r とする．(i) (ii), (ii) (iii), (iii) (i) を結ぶループの本数をそれぞれ a, b, c 本とすれば，$p=c+a$, $q=a+b$, $r=b+c$ という条件が付く．このため，p, q, r について『総和は偶数，どれも他の 2 つの和より大きくない』．従って，$j_p=p/2$, $j_q=q/2$, $j_r=r/2$ は量子力学のスピンの条件を満たす自由度である．例えば，j_p, j_q を固定したとき，j_r は

$$j_r = |j_p - j_q|, |j_p - j_q| + 1, \ldots, (j_p + j_q) - 1, j_p + j_q \tag{4.57}$$

であり，上記の条件は

$$\begin{aligned} &j_p + j_q \geq j_r, \quad j_p + j_r \geq j_q, \quad j_q + j_r \geq j_p, \\ &j_p + j_q + j_r \in Z \end{aligned} \tag{4.58}$$

と表せる．

さて，この表し方を用いてスピンネットワークと面積の関係を見てみよう (図 4.12)．今，面積要素を貫くリンクにのみ半整数の値を書き込んだが，それ以外のリンクにはこの値に矛盾しないように数字を書き込むべきである．ループのときには交点数が出てきたが，スピンであることを反映した寄与を生み，面積固有値は[48]

$$A = 8\pi\gamma G \sum_i \sqrt{j_i(j_i+1)} \tag{4.59}$$

である．$j=1/2$ の場合には交点数の場合の結果が再現される．これは (4.45) の代わりに一般の j 表現の場合の公式

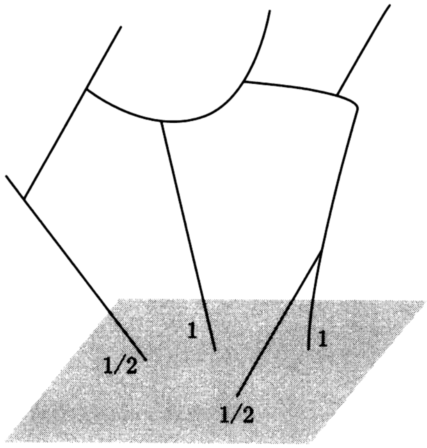


図 4.12　スピンネットワークと面積固有値.

$$\sum_I (\tau^I)^2 = -j(j+1)\mathbf{I} \tag{4.60}$$

を用いたものとみなすこともできる．また，古典論での面積 (4.53) は γ に依らないが，量子論では共役運動量が微分演算子に変わるために，結果が γ に依ることにも注意したい．このため，離散化のサイズは γG の組み合わせで決まるのである．

(4.59) は全てのリンクが面積要素を貫いている場合だが，実際はリンクが面上に載っている場合も含めて考えないといけない．この場合は次のように拡張される．

$$A = 4\pi\gamma G \sum_i \sqrt{2j_i^u(j_i^u+1) + 2j_i^d(j_i^d+1) - j_i^t(j_i^t+1)}\ . \tag{4.61}$$

ここで添え字 u, d 及び t はリンクが面の上にあるか下にあるか接しているかを表す．どちらが上か下かは任意に選べる．実際，$j^t = 0$ とすると $j^u = j^d =: j$ が要請され，簡単な場合の面積公式 (4.59) が再現される．(4.61) を用いると，最小面積固有値 Δ は，$i = 1$ のみで $j^d = 0, j^u = j^t = 1/2$（あるいは $j^u = 0$, $j^d = j^t = 1/2$）と選ぶことで得られ

$$\Delta = 2\sqrt{3}\pi\gamma G \tag{4.62}$$

と定まる．これは第 5, 6 章で議論するループ量子宇宙論で用いる．

4.2.3　n バレント

ノードでリンクが 4 本以上結ばれている場合はどのように扱えるだろうか？リンクが n 本結ばれているノードを **n バレント**と呼ぶが，図 4.13 のように 4 バレントの場合で 3 バレントの場合との違いを見てみよう．

ループの重複度 p，q，r，s としてすぐに 3 バレントの場合から拡張できる

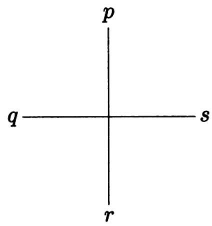


図 4.13　4 バレントとループの重複度 p, q, r, s.

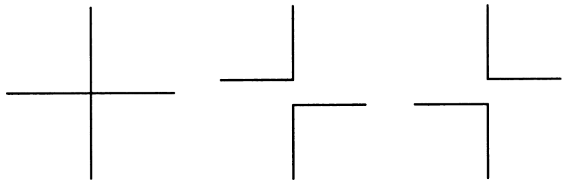


図 4.14　4 バレントとループの結び方.

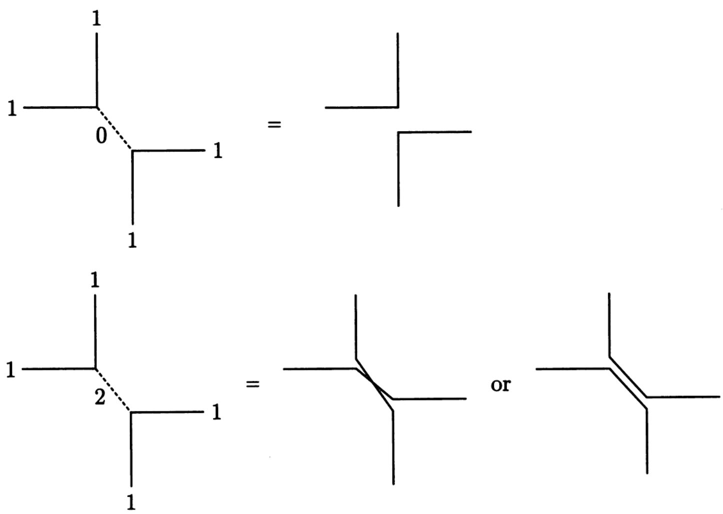


図 4.15　仮想的リンク（点線）と実際のループの結び方.

だろうか？ p–q を結ぶループの本数を a 本とする．以下同様に，p–r は b 本，p–s は c 本，q–r は d 本，q–s は e 本，r–s は f 本のループで結ばれているとする．このように一旦 a から f までの 6 変数を決めてしまえば，4 つのループの重複度は決まる．しかし，逆に 4 つのループの重複度を決めたからと言って各リンクを結ぶループの本数は決まらない．自由度が不足しているのである．これが 3 バレントの場合との決定的な違いである．例えば $p = q = r = s = 1$ の場合を取っても，図 4.14 のように，結び方として上と下，上と左，上と右の 3 通りの可能性がある．

これを 3 バレントの場合と同様に扱うには図 4.15 の左側のように仮想的なリンクを導入すればよい．左側の図は，右側の図のように表すことができ，これらは図 4.14 の 3 通りに対応している．左側に書き込んでいるループの重複

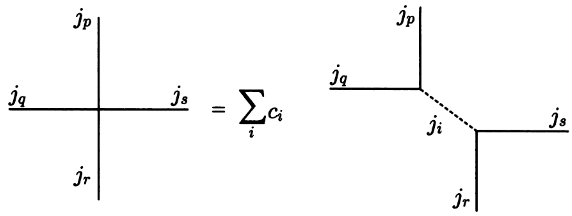


図 4.16

度を 2 で割ったものは再びスピンの自由度で表せることは明らかだろう．

一般的に 4 バレントの場合，図 4.16 のようにスピン j_i を持つ仮想的なリンクを導入して 3 バレントに分解される．j_i は $\max(|j_p - j_q|, |j_r - j_s|)$ から $\min(j_p + j_q, j_r + j_s)$ の値を取り，係数 c_i はこれらのスピンに依存する．バレントの次元数 dim を

$$\dim = \min(j_p + j_q, j_r + j_s) - \max(|j_p - j_q|, |j_r - j_s|) + 1 \qquad (4.63)$$

で定義する．例えば，図 4.15 の場合は $j_p = j_q = j_r = j_s = 1/2$ であるから $j_i = 0, 1$ の 2 通りの可能性があり，dim= 2 である．$j_p = j_q = j_r = j_s = 1$ の場合は $j_i = 0, 1, 2$ の 3 通りの可能性があり，dim= 3 である．n バレントの場合は $(n-3)$ 個の仮想的なリンクを導入して同じ方法で 3 バレントの和に分解することができる．

4.2.4 体積作用素

体積は古典論では

$$V = \int d^3y \sqrt{\left| \frac{1}{3!} \epsilon_{abc} \epsilon^{IJK} E^a_I E^b_J E^c_K \right|} \qquad (4.64)$$

と表せ，量子化したもの $\hat{V}$ をスピンネットワークに作用させればよい．面積の場合 (4.54) に対応して今度は体積要素内にあるノードの数と関係して寄与が生まれるが，3 バレントでは 0 になる．これはゲージ拘束条件と 3 バレントに関わるリンクの独立な自由度が 2 のためである．(4.64) の ϵ_{abc} が効いて最終的な結果は 0 になってしまう．4 バレント以上のノードでのみ，0 でない寄与をもたらす可能性があり，模式的には

$$\hat{V}\Psi_s = (8\pi\gamma G)^{3/2} \sum_i c_i \Psi_s \qquad (4.65)$$

のように書くことができる．i は 4 バレント以上のノード全体にわたって取り，c_i はノードでのリンクのスピンの関数である．

4 バレントのノードでの幾つかのスピンと次元 dim，c_i の関係を表にしておく[49]．(2) などは次元と関係して 2 つ同じ固有値があることを意味している．c_i を出す上では (2) は単に 2 倍するものと思えばよいし，複数並んでいれば足

表 4.1　4 バレントのノードの体積固有値への寄与.

j_p	j_q	j_r	j_s	dim	c_i
1/2	1/2	1/2	1/2	2	$(2)\sqrt{\sqrt{3}/8}$
1	1	1/2	1/2	2	$(2)2^{1/4}/2$
1	1	1	1	3	$(1)0,\ (2)\sqrt{\sqrt{3}/2}$
3/2	1	1	1/2	2	$(2)5^{1/4}/2$
3/2	3/2	3/2	3/2	4	$(2)\sqrt{3\sqrt{3}/8},\ (2)\sqrt{3\sqrt{35}/8}$

し合わせればよい.

体積固有値は一般的には非常に複雑な表式であり，数値計算のアルゴリズムにさえ乗せにくいことで知られていたが，Brunnemann と Thiemann はこの点を改良した[50]．論文では「ループ量子重力理論の計算にスーパーコンピューターを用いる時代がきた」と宣言している.

4.3　数学的側面

4.3.1　スピンネットワーク

前述のスピンネットワークをより数学的に表してみよう．図 4.17 のようにリンク e_1, e_2, e_3 のスピンをそれぞれ $1, 1/2, 1/2$ としよう．この場合のスピンネットワーク Ψ は Pauli 行列 σ_I^{AB} を用いて

$$\Psi = \prod^{1} h(e_1)^{IJ} \prod^{1/2} h(e_2)_{AB} \prod^{1/2} h(e_3)_{CD} \sigma_I^{AC} \sigma_J^{BD} \tag{4.66}$$

と表せる．Pauli 行列がテンソル積の表現 $1 \otimes 1/2 \otimes 1/2$ において不変テンソルのため，Ψ はゲージ不変である．リンク e_1, e_2, e_3 のスピンがそれぞれ j, k, l の場合には不変テンソル $\imath \in j \otimes k \otimes l$ を用いて

$$\Psi = \prod^{j} h(e_1)_{m_1 n_1} \prod^{k} h(e_2)_{m_2 n_2} \prod^{l} h(e_3)_{m_3 n_3} \imath^{m_1 m_2 m_3} \imath^{n_1 n_2 n_3} \tag{4.67}$$

と表せる．このような不変テンソルは**関連子** (intertwiner) と呼ばれる．同様

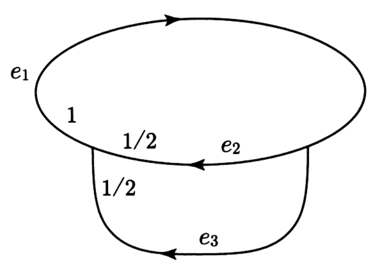


図 4.17　スピンネットワーク.

に，任意のノード n とリンク e の場合のスピンネットワークは

$$\Psi = \bigotimes_n \imath_n \bigotimes_e \prod^{j_e} h(e) \tag{4.68}$$

と表せる．ここでは行列，ノードやリンクの番号を表す添字は省略した．

4.3.2 Haar 測度と内積

スピンネットワークのさらなる利点としてホロノミーから Haar 測度が導入できる点が挙げられる．Haar 測度を簡単にまとめておく．Lie 群 $\mathcal{G}$ 上で定義された関数 $f(g)$ $(a, g \in \mathcal{G})$ に対して

$$\int f(ag) dg_L = \int f(g) dg_L \tag{4.69}$$

となるものを左不変 Haar 測度と呼び，定数倍の不定性を除いて一意的に決まる．例えば正の実数全体は乗法に関して群をなし，

$$\int_0^\infty f(ag) \frac{dx}{x} = \int f(g) \frac{dx}{x} \tag{4.70}$$

である．従って，不変測度としては $\frac{dx}{x}$ のように選べる．$\mathrm{GL}(n, R)$ の場合の両側不変測度としては

$$dg := (\det g)^{-n} \prod_{1 \leq i,j \leq n} dg_{ij} \tag{4.71}$$

と取ればよい．

スピンネットワークについては提案者の Ashtekar と Lewandowski にちなんで $d\mu_{AL}(A)$ と書くことにすると，

$$\int d\mu_{AL}(A) f(A) := \int f(g_1, g_2, \cdots, g_n) d_H(g_1, g_2, \cdots, g_n) \tag{4.72}$$

と定義される．d_H は SU(2)Haar 測度，g_i は SU(2) 群要素であり，次の性質を持つ．

$$\int d_H(g) = 1, \quad d_H g = d_H(g_i g) = d_H(g g_i) = d_H g^{-1} \,. \tag{4.73}$$

これを用いて内積を

$$(\Psi_\alpha, \Psi_\beta) := \int d\mu_{AL}(A) \bar{\Psi}_\alpha(A) \Psi_\beta(A) \tag{4.74}$$

と定義できる．このとき，**Peter–Weyl の定理**を用いてスピンネットワークが直交基底になっていることを示せる．この定理は U(1) の場合の次の性質を拡張したものである．f を 2 乗可積分な U(1) 要素として

$$f(\theta) = \sum_n f_n \exp(in\theta) \tag{4.75}$$

と表すことができ，$\exp(in\theta)$ はユニタリー規約表現，

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int d\theta \exp(-in\theta) f(\theta) \tag{4.76}$$

である．同様に $f \in$SU(2) で 2 乗可積分の場合にもそのユニタリー規約表現を用いて

$$f(g) = \sum_j \sqrt{2j+1} f_j^{mm'} \prod_{mm'}^{j}(g) \tag{4.77}$$

と表すことができ，

$$f_j^{mm'} = \sqrt{2j+1}\int d_H(g) \prod_{mm'}^{j}(g^{-1}) f(g) \tag{4.78}$$

である．ただし，$-j \leq m, m' \leq j$ とする．$\phi_{mn}^{j} := \sqrt{2j+1}\prod_{mn}^{j}(g_j)$ と書くと，

$$\int d_H g \phi_{m'm}^{j} \phi_{q'q}^{j'} = \delta_{jj'}\delta_{mq}\delta_{m'q'} \tag{4.79}$$

の直交関係が成り立つ．スピンネットワークにこれを用いると

$$\begin{aligned}\Psi &= f(h(e_1), h(e_2), \cdots, h(e_N)) \\ &= \sum_{j_1\cdots j_N} f_{j_1\cdots j_N}^{m_1\cdots m_N n_1\cdots n_N} \phi_{m_1 n_1}^{j_1}(h(e_1))\cdots\phi_{m_N n_N}^{j_N}(h(e_N))\end{aligned} \tag{4.80}$$

と表せることを意味し，このため直交基底として用いることができることがわかる．

第 5 章
ループ量子宇宙論I：基本編

前章で見たように，基本変数の Poisson 代数にデルタ関数が現れないようにするために，ホロノミーとフラックスを用いた．この操作は拘束条件にも必要で，Thiemann はこの操作をすると共に，見通しが良くなる書き方ができることを発見した．体積作用素とホロノミーを用いて拘束条件を書き換えるのである．この操作は形式的には時空モデルによらず行うことができるが，ここでは一様等方で空間的に平坦な宇宙を考える．本質的な点は殆どこのモデルに含まれている．格子サイズを決めるパラメーター λ を 0 としないことがスカラー曲率の固有値が発散しないこと，宇宙の波動関数を決める方程式が微分方程式ではなく，差分方程式になることと関係することを見る．この差分方程式は，体積固有値の大小を時間の前後と関連させることで波動関数の時間発展を表す式と解釈できる．また，従来の量子宇宙論では未解決であった特異点回避の可能性がある上，膨張と収縮を繰り返す宇宙という描像を提示する．

5.1 一様等方時空とホロノミー変数

一様等方で空間的に平坦な宇宙を考える．この場合，FRW 計量を用いて

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \tag{5.1}$$

と表せる．時間に依存しない標準平坦計量 q_{ab} とこれに付随する直交三脚場 $\tilde{e}^a_I$，及びその相反三脚場 (cotriad) $\tilde{e}^I_a$ を定義する*1)．平坦性から Γ^I_a が消え，(4.40) より

$$A^I_a = \gamma K^I_a \tag{5.2}$$

と表せる．従って

*1) 訳語は [19] に従った．

$$K^I_{[a}K^J_{b]}E^a_I E^b_J = \frac{1}{\gamma^2}A^I_{[a}A^J_{b]}E^a_I E^b_J \ . \tag{5.3}$$

F^I_{ab} からも微分項が消え，

$$F^I_{ab} = \epsilon^{ILM}A^L_a A^M_b \tag{5.4}$$

と書ける．これと関係式 (B.19) を用いると

$$\begin{aligned} &\epsilon^{IJK}F^I_{ab}E^a_J E^b_K = \epsilon^{IJK}\epsilon^{ILM}A^L_a A^M_b E^a_J E^b_K \\ &= (\delta^J_L\delta^K_M - \delta^J_M\delta^K_L)A^L_a A^M_b E^a_J E^b_K = (A^J_a A^K_b - A^J_b A^K_a)E^a_J E^b_K \\ &= 2A^J_{[a}A^K_{b]}E^a_J E^b_K \end{aligned} \tag{5.5}$$

である．(5.3) と (5.5) より

$$K^I_{[a}K^J_{b]}E^a_I E^b_J = \frac{1}{2\gamma^2}\epsilon^{IJK}F^I_{ab}E^a_J E^b_K \tag{5.6}$$

であるから Hamiltonian 拘束条件 (4.42) は，次のように書き換えることができる[36]．

$$C_{\rm grav} = \frac{-1}{16\pi\gamma^2 G}\int_\nu d^3x\left(\frac{1}{\sqrt{|E|}}\epsilon^{IJK}F^I_{ab}E^a_J E^b_K\right) \ . \tag{5.7}$$

実接続及び三脚場密度は

$$A^I_a = \tilde{c}\tilde{e}^I_a, \quad E^a_I = \tilde{p}\sqrt{q}\tilde{e}^a_I \tag{5.8}$$

のように与えられる．ここで，$\tilde{c} := {\rm sgn}(p)\gamma da/dt$, $|\tilde{p}| := a^2$ である．ただし，$\tilde{c}, |\tilde{p}|$ には q_{ab} のスケーリングによる不定性がある．k を定数として $q_{ab} \to k^2 q_{ab}$ とすれば $\tilde{c} \to k^{-1}\tilde{c}, |\tilde{p}| \to k^{-2}|\tilde{p}|$ のように振る舞う．これを取り除くため，$V_0 := \int_\nu d^3x\sqrt{q}$ を用いて $c := V_0^{1/3}\tilde{c}$, $|p| := V_0^{2/3}|\tilde{p}|$ とする．$|p|$ は基本セルの面積に比例し，c は p の共役運動量である．Poisson 括弧式は

$$\{A^L_d(x), E^a_I(y)\} = 8\pi\gamma G\delta^a_d\delta^L_I\delta(x-y) \tag{5.9}$$

から

$$\{c, p\} = \frac{8\pi\gamma G}{3} \tag{5.10}$$

のようになる．

Hamiltonian 拘束条件 (5.7) をホロノミーと V を用いて書き換えてゆこう．$\tilde{e}^a_I$ に平行なリンクに沿ったホロノミー $h^{(\lambda)}_I$ は

$$h^{(\lambda)}_I = e^{\lambda c\tau_I} \tag{5.11}$$

と表せる．λ はリンクの座標上の長さである．

Hamiltonian 拘束条件を書き換える際には，ホロノミーのトレースの取り方と関係した不定性があることに注意しなければならない．**規約表現の取り方には不定性があるため，量子化する段階では違いが現れる**[51]．簡単のため，$j = 1/2$ 表現を選ぶことにすると，ホロノミーは

$$h_I^{(\lambda)} = \mathrm{C}\mathbf{I} + 2\mathrm{S}\tau_I \tag{5.12}$$

である．ただし，

$$\mathrm{S} := \sin\frac{\lambda c}{2}, \quad \mathrm{C} := \cos\frac{\lambda c}{2} \tag{5.13}$$

を用いた．

(5.7) の最初の項のうち，三脚場のパートについては[52]

$$\boxed{\epsilon^{IJK}\tau_I\frac{E_J^a E_K^b}{\sqrt{|E|}} = \frac{-2\mathrm{sgn}(p)}{8\pi\gamma G\lambda V_0^{\frac{1}{3}}}\epsilon_{abc}\tilde{e}_c^I\left(h_I^{(\lambda)}\left\{\left(h_I^{(\lambda)}\right)^{-1}, V\right\}\right)} \tag{5.14}$$

で，V は体積である*2)．この計算は次のように行える．

簡単のため，正準変数を X と書くことにすると，(4.64) より

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \int d^3x\frac{\mathrm{sgn}(p)}{4\sqrt{|E|}}\epsilon_{abc}\epsilon^{IJK}\frac{\partial E_I^a}{\partial X}E_J^b E_K^c\ . \tag{5.15}$$

これを使うと

$$\begin{aligned}\{A_d^L, V\} &= \int d^3x\frac{\mathrm{sgn}(p)}{4\sqrt{|E|}}\epsilon_{abc}\epsilon^{IJK}E_J^b E_K^c\{A_d^L, E_I^a\}\\ &= \frac{2\pi\gamma G\mathrm{sgn}(p)}{\sqrt{|E|}}\epsilon_{dbc}\epsilon^{LJK}E_J^b E_K^c\ .\end{aligned} \tag{5.16}$$

ここで (5.9) を用いた．このままだとホロノミーが出てこないが，

$$\tilde{e}_a^J\frac{h_I^{(\lambda)}}{\lambda V_0^{1/3}}\frac{\partial\left(h_I^{(\lambda)}\right)^{-1}}{\partial X} = -\tau_I\frac{\partial A_a^J}{\partial X} \tag{5.17}$$

なので，(5.16) に τ_I をかけて

$$\begin{aligned}\frac{2\pi\gamma G\mathrm{sgn}(p)\epsilon_{abc}\epsilon^{LJK}\tau_I E_J^b E_K^c}{\sqrt{|E|}} &= \tau_I\{A_a^L, V\}\\ &= -\frac{\tilde{e}_a^L h_I^{(\lambda)}\{h_I^{(\lambda)-1}, V\}}{\lambda V_0^{1/3}}\ .\end{aligned} \tag{5.18}$$

---

*2)　(5.14) でなぜ約分しないのかと思われる読者もいるだろう．式の起源を明らかにするため，論文などではあえて約分しない場合も多い．以下でもこのような例が多数登場する．

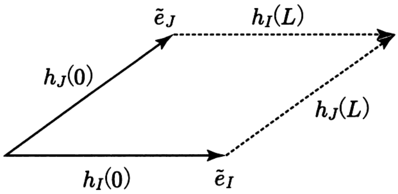


図 5.1 ホロノミーと三脚場 $\tilde{e}^a_I$ の位置関係.

これに ϵ^{ade} をかけ，(B.19) を用いてまとめると (5.14) が得られる．

曲率 F^I_{ab} に関しては通常のゲージ理論の処方を用いる．座標長さ λ の 2 つの三脚場 $\tilde{e}^a_I$，$\tilde{e}^b_J$ で張られた正方形 α からなるループを考える．このとき，

$$\tau_I F^I_{ab} = \lim_{\text{Area}\to 0}\left(\frac{h^{(\lambda)IJ}_\alpha - \delta^{IJ}}{\lambda^2 V_0^{\frac{2}{3}}}\right)\tilde{e}^I_a \tilde{e}^J_b \tag{5.19}$$

であり，α に沿ったホロノミー $h^{(\lambda)IJ}_\alpha$ は，4 つのリンクに沿ったホロノミーの積として表せる．即ち，

$$h^{(\lambda)IJ}_\alpha = h^{(\lambda)}_I h^{(\lambda)}_J \left(h^{(\lambda)}_I\right)^{-1}\left(h^{(\lambda)}_J\right)^{-1} . \tag{5.20}$$

(5.19) の計算は次のように行うことができる．

$$L := \lambda V_0^{1/3}, \quad x_I := \lambda c \tau_I = A^K_c \tau_K \tilde{e}^c_I L \tag{5.21}$$

と置く．記法としては若干煩雑になるが，$\tilde{e}^a_I$ の始点，終点を出発点として $\tilde{e}^b_J$ 方向に進むホロノミーをそれぞれ $h_J(0)$, $h_J(L)$ と区別する．同様に $\tilde{e}^b_J$ の始点，終点を出発点として $\tilde{e}^a_I$ 方向に進むホロノミーはそれぞれ $h_I(0)$, $h_I(L)$ と区別する（図 5.1)．

この記法を用いると (5.20) は

$$h^{(\lambda)IJ}_\alpha = h_I(L) h_J(0) \left(h_I(0)\right)^{-1}\left(h_J(L)\right)^{-1} \tag{5.22}$$

と書き直せる．(5.19) から，計算の最終段階では x_J の 3 次以上は無視できることがわかるので

$$h_J \simeq \mathbf{I} + x_J + \frac{x_J^2}{2} \tag{5.23}$$

と近似する．同じ理由で，$x_J(0)$ と $x_J(L)$ は区別するが，$x^2_J(0)$，$x_J(0)x_J(L)$ と $x^2_J(L)$ は区別する必要がない．これらに基づいて (5.22) を計算すると

$$\begin{aligned} h^{(\lambda)IJ}_\alpha &\simeq \mathbf{I} + x_I(0) - x_I(L) - [x_J(0) - x_J(L)] + x_I x_J - x_J x_I \\ &\simeq \mathbf{I} + L(\tilde{e}^d_I \partial_d x_J - \tilde{e}^c_J \partial_c x_I) + x_I x_J - x_J x_I \ . \end{aligned} \tag{5.24}$$

(5.24) の第 2 項に $\tilde{e}^I_a \tilde{e}^J_b$ をかけると

$$L(\tilde{e}^J_b \partial_a x_J - \tilde{e}^I_a \partial_b x_I) = L^2 \tau_K (\partial_a A^K_b - \partial_b A^K_a) \tag{5.25}$$

である．また，(5.24) の第 3 項を A^K_b を用いて書き直すと

$$x_I x_J - x_J x_I = L^2 (A^K_c \tau_K \tilde{e}^c_I A^M_d \tau_M \tilde{e}^d_J - A^M_c \tau_M \tilde{e}^c_J A^K_d \tau_K \tilde{e}^d_I) \tag{5.26}$$

なので，右辺に $\tilde{e}^I_a \tilde{e}^J_b$ をかけると

$$L^2 (A^K_a \tau_K A^M_b \tau_M - A^M_b \tau_M A^K_a \tau_K) = L^2 A^K_a A^M_b \epsilon_{IKM} \tau_I \ . \tag{5.27}$$

(5.25) 及び (5.27) を用いると，(5.24) は

$$\begin{aligned} h^{(\lambda) IJ}_\alpha \tilde{e}^I_a \tilde{e}^J_b &\simeq \tilde{e}^I_a \tilde{e}^J_b \mathbf{I} + L^2 \tau_I (\partial_a A^I_b - \partial_b A^I_a) + L^2 A^K_a A^M_b \epsilon_{IKM} \tau_I \\ &= \tilde{e}^I_a \tilde{e}^J_b \mathbf{I} + L^2 \tau_I F^I_{ab} \end{aligned} \tag{5.28}$$

と書き直せる．これを (5.19) の右辺に代入すれば左辺が示せる．

これで役者は揃った．(5.14) × (5.19) において $\epsilon_{abc} \tilde{e}^I_a \tilde{e}^J_b \tilde{e}^K_c = \epsilon^{IJK} \sqrt{q}$ を用いると

$$\begin{aligned} -\frac{\mathbf{I}}{4\sqrt{|E|}} \epsilon^{IJK} F^I_{ab} E^a_J E^b_K &= -\frac{\mathrm{sgn}(p) \epsilon^{IJK}}{4\pi\gamma G \lambda V_0^{1/3}} \sqrt{q} \\ &\times \left[h^{(\lambda)}_K \left\{ \left(h^{(\lambda)}_K \right)^{-1}, V \right\} \right] \lim_{\mathrm{Area} \to 0} \left(\frac{h^{(\lambda) IJ}_\alpha - \delta^{IJ}}{\lambda^2 V_0^{\frac{2}{3}}} \right) \ . \end{aligned} \tag{5.29}$$

従って，(5.20) から

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^{IJK}}{\sqrt{|E|}} F^I_{ab} E^a_J E^b_K &= \frac{\mathrm{sgn}(p) \epsilon^{IJK}}{2\pi\gamma G \lambda^3 V_0} \sqrt{q} \\ &\times \mathrm{Tr} \left[h^{(\lambda)}_I h^{(\lambda)}_J \left(h^{(\lambda)}_I \right)^{-1} \left(h^{(\lambda)}_J \right)^{-1} h^{(\lambda)}_K \left\{ \left(h^{(\lambda)}_K \right)^{-1}, V \right\} \right] \ . \end{aligned} \tag{5.30}$$

(5.30) を (5.7) に代入し，積分すると C_{grav} は次のように表せる．

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{grav}} &= \frac{-\mathrm{sgn}(p)}{32\pi^2 \gamma^3 G^2 \lambda^3} \sum_{IJK} \epsilon^{IJK} \\ &\times \mathrm{Tr} \left[h^{(\lambda)}_I h^{(\lambda)}_J \left(h^{(\lambda)}_I \right)^{-1} \left(h^{(\lambda)}_J \right)^{-1} h^{(\lambda)}_K \left\{ \left(h^{(\lambda)}_K \right)^{-1}, V \right\} \right] \ . \end{aligned} \tag{5.31}$$

5.2 量子化

(5.31) を量子化しよう．このときには $h^{(\lambda)}_I$ と p 及び V を対応する作用素に置き換える．運動学的な Hilbert 空間は $H^{\mathrm{grav}}_{\mathrm{kin}} = L^2(R_{\mathrm{Bohr}}, d\mu_{\mathrm{Bohr}})$ で定

義され，R_{Bohr} は実線の Bohr コンパクト化，$d\mu_{\text{Bohr}}$ はその Haar 測度である[37],[53]~[56]．連続関数 $f(c)$ のノルムは

$$||f||^2 = \lim_{D\to\infty} \frac{1}{2D} \int_{-D}^{D} \bar{f} f dc \tag{5.32}$$

で定義される．この Bohr は Harald Bohr で Niels Bohr の弟にして数学者，それだけでなく，1908 年デンマーク代表のサッカー選手としてロンドンオリンピックに出場し，銀メダルを獲得しているというから驚きである．PK ではトンネル効果でも狙ったのだろうか？ Hilbert 空間の直交基底は $\hat{p}$ の固有状態 $\{|\mu\rangle := |e^{i\mu c/2}\rangle\}$ の集合で与えられ，正規直交関係 $\langle\mu_1|\mu_2\rangle = \delta_{\mu_1\mu_2}$ を満たす．このように，古典論の段階で対称性を課していることによって，量子論の記述がスピンネットワークに比べて全て単純化されている．状態 $|\mu\rangle$ に対する $\hat{p}$ の作用は

$$\hat{p}|\mu\rangle = \frac{8\pi\gamma G}{6}\mu|\mu\rangle \tag{5.33}$$

であり，$\hat{p}$ の固有値は無次元のパラメーター μ で特徴づけられる．状態 $|\mu\rangle$ は体積作用素 $\hat{V} = \widehat{|p|^{3/2}}$ の固有状態でもあり，

$$\hat{V}|\mu\rangle = \widehat{|p|^{3/2}}|\mu\rangle = V_\mu|\mu\rangle\ , \tag{5.34}$$

ただし，

$$V_\mu = \left(\frac{8\pi\gamma G}{6}|\mu|\right)^{3/2}\ . \tag{5.35}$$

(5.11) と (5.31) 及び，Poisson 括弧を交換子に置き換えることで

$$\hat{C}_{\text{grav}} = \frac{3i\,(\text{sgn}(p))}{4\pi^2\gamma^3 G^2\lambda^3}\text{S}^2\text{C}^2\left[\text{S}\hat{V}\text{C} - \text{C}\hat{V}\text{S}\right] \tag{5.36}$$

を得る．この計算は次のように行うことができる．(5.31) のうち正方形 α に沿ったホロノミーのパートは

$$\begin{aligned}
&h_I^{(\lambda)} h_J^{(\lambda)} \left(h_I^{(\lambda)}\right)^{-1} \left(h_J^{(\lambda)}\right)^{-1} \\
&= \text{C}^4\mathbf{I} + 4\text{S}^2\text{C}^2(\tau_I\tau_J - \tau_J\tau_I) - 16\text{S}^4\tau_I\tau_J\tau_J\tau_I \\
&- 8\text{S}^3\text{C}[(\tau_I+\tau_J)\tau_J\tau_I + \tau_I\tau_J(\tau_I+\tau_J)] - 4\text{S}^2\text{C}^2(\tau_I+\tau_J)^2 \\
&= \text{C}^4\mathbf{I} + 4\text{S}^2\text{C}^2\tau_K - \text{S}^4\mathbf{I} + 4\text{S}^3\text{C}(\tau_I+\tau_J) - 4\text{S}^2\text{C}^2(\tau_I+\tau_J)^2\ .
\end{aligned} \tag{5.37}$$

これに $\epsilon^{IJK} h_K^{(\lambda)} \left[\left(h_K^{(\lambda)}\right)^{-1}, \hat{V}\right]$ をかけてさらにトレースの操作を行う必要があるので，一見すると大変な計算に見える．しかし，ϵ^{IJK} がかかることに注意すると，添字 I と J の入れ替えに対して対称な項は最終的には 0 になることが

わかる．従って，(5.37) において**第 2 項以外は最終的な結果に効かない**．また

$$h_K^{(\lambda)}\left[\left(h_K^{(\lambda)}\right)^{-1},\hat{V}\right]$$
$$=(\hat{V}-\mathrm{C}\hat{V}\mathrm{C}-\mathrm{S}\hat{V}\mathrm{S})\mathbf{I}+2(\mathrm{C}\hat{V}\mathrm{S}-\mathrm{S}\hat{V}\mathrm{C})\tau_K \qquad (5.38)$$

であるが，第 1 項は，(5.37) の第 2 項をかけたときに τ_K が残ってしまう．このトレースを取ると 0 になる．従って，(5.38) で τ_K をかけてトレースを取っても最終的に残る可能性がある項は

$$2(\mathrm{C}\hat{V}\mathrm{S}-\mathrm{S}\hat{V}\mathrm{C})\tau_K \qquad (5.39)$$

のみである．結局 (5.37) × (5.39) で最終的に残る可能性がある項は

$$2\mathrm{S}^2\mathrm{C}^2(\mathrm{S}\hat{V}\mathrm{C}-\mathrm{C}\hat{V}\mathrm{S})\mathbf{I} \qquad (5.40)$$

と書けるので，トレースと ϵ^{IJK} の和を取れば

$$3!\times 2\times 2\mathrm{S}^2\mathrm{C}^2(\mathrm{S}\hat{V}\mathrm{C}-\mathrm{C}\hat{V}\mathrm{S}) \qquad (5.41)$$

である．ここから (5.36) を得る．ここでは演算子順序は固定されているが，実際にはこれも議論が必要である．一般的には λ も演算子であるが，煩雑となるのでハット ^ は付けないことにする．

ここで用いた方法は格子ゲージ理論の手法を真似たものであるが，その場合と異なり，原理的に $\lambda\to 0$ の極限は取らないことに注意する必要がある．$\lambda\neq 0$ 及び BI パラメーター $\gamma\neq 0$ であることが最小面積や最小体積が 0 でないことと対応している．

5.3 離散化の不定性

どのように λ を決めるか，ということに対して第一原理的な決め方はないが，ここでは代表的な 2 つの決め方を紹介する．まず，次の関係式に注目する．

$$\widehat{|p|}h_I^{(\lambda)}=\frac{8\pi\gamma G}{6}|\lambda|h_I^{(\lambda)}\ . \qquad (5.42)$$

$|p|$ は基本セルの物理的な面積である．右辺の固有値が (4.62) の最小面積 $\Delta=2\sqrt{3}\pi\gamma G$ と等しいように選ぶというのは一つの合理的な方法である．これから $\lambda=\mu_0:=3\sqrt{3}/2$ と定まる[36], [55], [57], [58]．Hamiltonian に現れる基本作用素は $\exp(i\mu_0 c/2)$ で，

$$e^{i\mu_0 c/2}|\mu\rangle=|\mu+\mu_0\rangle \qquad (5.43)$$

のように作用する．これは，Hamiltonian 拘束条件に現れる状態に対し，状態 $|\mu\rangle$ は等間隔を刻むことを意味する．(5.43) は，$\exp(i\mu_0 c/2)$ が状態 $|\mu\rangle$ をベ

クトル $d/d\mu$ に沿って長さ μ_0 だけ移動させると解釈することもでき，

$$e^{i\mu_0 c/2}|\mu\rangle = e^{\mu_0(d/d\mu)}|\mu\rangle \tag{5.44}$$

と書き直すことができる．この λ の選び方を**等面積離散化**と呼ぶことにする．

しかし，これだけが唯一の選択肢というわけではない[56]．正方形に沿ってのホロノミー $h_\alpha^{(\lambda)IJ}$ を用いることから，この正方形の面積を最小面積 Δ に取る，というのも合理的な選択肢である．この正方形の一辺の長さは基本セルの一辺の長さの λ 倍であるから，$\lambda =: \bar{\mu}(p)$ として

$$\bar{\mu}^2|p| = \Delta \tag{5.45}$$

のように選ぶことを意味する．これと (5.33) から

$$\bar{\mu}^2|\mu| = \frac{3\sqrt{3}}{2} . \tag{5.46}$$

(5.44) と同様に

$$e^{i\mu_0 c/2}|\mu\rangle = e^{\bar{\mu}(d/d\mu)}|\mu\rangle \tag{5.47}$$

と書き直すこともできる．変数 v を

$$dv = \frac{1}{\bar{\mu}}d\mu \tag{5.48}$$

を満たすように選べば，(5.47) を

$$e^{\bar{\mu}\frac{d}{d\mu}}|\mu\rangle = e^{\frac{d}{dv}}|\mu\rangle \tag{5.49}$$

と書き直すこともできる．この場合は波動関数として v を用いて表現した方が簡単になる．(5.46) を用いて (5.48) を積分すると

$$v = \mathrm{sgn}(\mu)K|\mu|^{\frac{3}{2}} , \tag{5.50}$$

ただし，$K = 2\sqrt{2}/(3\sqrt{3\sqrt{3}})$ である．v が体積 V に比例することには注意したい．実際には $\hat{V}$ の固有状態 $|v\rangle$ を用いた方が Hamiltonian 拘束条件を議論する上で便利である．$|v\rangle$ は

$$\hat{V}|v\rangle = V_v|v\rangle, \tag{5.51}$$

を満たし，

$$V_v = \left(\frac{8\pi\gamma G}{6}\right)^{3/2}\frac{|v|}{K} \tag{5.52}$$

である．$e^{i\bar{\mu}c/2}$ の $|v\rangle$ に対する作用は

$$e^{i\bar{\mu}c/2}|v\rangle = |v+1\rangle \tag{5.53}$$

である．結果として Hamiltonian 拘束条件を書き換えると体積固有状態が等間

隔で現れる．この選び方を**等体積離散化**と呼ぶことにする．この場合も λ が p の関数であるため，量子論では作用素として扱う必要がある．$\widehat{1/\bar{\mu}^3}$ は (5.33), (5.45) 及び (5.50) を使うと，$\hat{V}$ を用いて

$$\widehat{\frac{1}{\bar{\mu}^3}} = \left(\frac{6}{8\pi\gamma G}\right)^{3/2} \frac{K\hat{V}}{\sqrt{3}} \tag{5.54}$$

と表せる．

5.4 特異点回避と演算子順序の問題

ここでは，体積固有値や p を内部時間と解釈したとき，量子化した Hamiltonian 拘束条件から時間発展を表す差分方程式が現れるのを見る．ループ量子宇宙論では，古典論において特異点を持つ $a \to 0$ の時刻，即ち体積固有値 0 の固有状態を超えて波動関数が決定できるかどうかということ，a^{-1} の固有値が発散しないことの 2 つを特異点回避の基準に用いる．特異点回避は演算子順序に依存する．

5.4.1 等面積離散化を用いた場合

演算子順序には多くの可能性がある．次の記法を導入する．

$$\hat{F} = \mathrm{S}^2\mathrm{C}^2\ , \quad \widehat{EE} = \mathrm{S}\hat{V}\mathrm{C} - \mathrm{C}\hat{V}\mathrm{S}\ . \tag{5.55}$$

F 及び EE はそれぞれの項の起源を表している．F は (5.19) の左辺のように曲率が起源であり，${h_\alpha}^{IJ}$ と関係する．また，EE は (5.14) の左辺のように三脚場密度が起源であり，Poisson 括弧 $h_I\left\{(h_I)^{-1}, V\right\}$ と関係する．実際には S も C も演算子であるが，$\hat{}$ は省略する．例えば，

$$\hat{C}_{\mathrm{grav}} = \frac{3i\,(\mathrm{sgn}(p))}{4\pi^2\gamma^3G^2\mu_0^3}\hat{F}\widehat{EE} \tag{5.56}$$

の演算子順序を考えてみよう[58]．$\hat{C}_{\mathrm{grav}}$ は自己共役演算子ではない．Ashtekar らはこれに対し，2 通りの可能性を提唱している[55]．一つは

$$\hat{C}'_{\mathrm{grav}} = \frac{1}{2}\left[\hat{C}_{\mathrm{grav}} + \left(\hat{C}_{\mathrm{grav}}\right)^\dagger\right] \tag{5.57}$$

のように取る可能性，もう一つはあらかじめ $\mathrm{SC} = \frac{1}{2}\sin(\mu_0 c)$ を用いて $\hat{F}$ を書き換えておいて

$$\hat{C}''_{\mathrm{grav}} = \frac{3i\,(\mathrm{sgn}(p))}{16\pi^2\gamma^3G^2\mu_0^3}\sin(\mu_0 c)\widehat{EE}\sin(\mu_0 c) \tag{5.58}$$

のように取る可能性である．これらも興味深い可能性ではあるが，特異点回避に関しては本質的な違いはない．ここでは簡単のため，$\hat{F}$ と $\widehat{EE}$ の右辺に関する順序は固定する．その場合，Hamiltonian 拘束条件には 2 通りの演算子順

序 $\hat{F}\widehat{EE}$ と $\widehat{EE}\hat{F}$ がある．

まず (5.56) を考える．このとき，$\langle\mu|\hat{C}_{\rm grav}|\Psi\rangle = 0$ から次の差分方程式が得られる．

$$|V_{\mu+5\mu_0} - V_{\mu+3\mu_0}|\,\Psi(\mu+4\mu_0) - 2\,|V_{\mu+\mu_0} - V_{\mu-\mu_0}|\,\Psi(\mu) + |V_{\mu-3\mu_0} - V_{\mu-5\mu_0}|\,\Psi(\mu-4\mu_0) = 0\ . \tag{5.59}$$

ただし，$\Psi(\mu) = \langle\mu|\Psi\rangle$ である．p **を内部時間として解釈すれば，この差分方程式は離散的な時間のもとでの発展方程式として捉えることもできる．**元々の方程式 $\langle\mu|\hat{C}_{\rm grav}|\Psi\rangle = 0$ は時間を含まないわけであり，面積固有値と関係して時間が定義できる点は興味深い．

この計算は煩雑ではあるが，本質は三角関数の計算にすぎない．例えば

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}|\mu\rangle &= \frac{1}{2}\left(e^{i\mu_0 c/2} + e^{-i\mu_0 c/2}\right)e^{i\mu c/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(|\mu+\mu_0\rangle + |\mu-\mu_0\rangle\right)
\end{aligned} \tag{5.60}$$

と書き直せる．同様にして

$$\mathrm{S}|\mu\rangle = -\frac{i}{2}\left(|\mu+\mu_0\rangle - |\mu-\mu_0\rangle\right) \tag{5.61}$$

である．これを元に

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}\hat{V}\mathrm{S}|\mu\rangle &= -\frac{i}{2}\mathrm{C}\hat{V}\left(|\mu+\mu_0\rangle - |\mu-\mu_0\rangle\right) \\
&= -\frac{i}{2}\mathrm{C}\left(V_{\mu+\mu_0}|\mu+\mu_0\rangle - V_{\mu-\mu_0}|\mu-\mu_0\rangle\right) \\
&= -\frac{i}{4}\left[V_{\mu+\mu_0}\left(|\mu+2\mu_0\rangle + |\mu\rangle\right) - V_{\mu-\mu_0}\left(|\mu\rangle + |\mu-2\mu_0\rangle\right)\right]
\end{aligned}$$

のように計算を進めることができる．同様にして

$$\mathrm{S}\hat{V}\mathrm{C}|\mu\rangle = -\frac{i}{4}\left[V_{\mu+\mu_0}\left(|\mu+2\mu_0\rangle - |\mu\rangle\right) + V_{\mu-\mu_0}\left(|\mu\rangle - |\mu-2\mu_0\rangle\right)\right]$$

なので，

$$\widehat{EE}|\mu\rangle = \frac{i}{2}\left(V_{\mu+\mu_0} - V_{\mu-\mu_0}\right)|\mu\rangle \tag{5.62}$$

が得られる．$\hat{F}$ については (5.60) と (5.61) を繰り返し用いることにより

$$\hat{F}|\mu\rangle = -\frac{1}{16}\left(|\mu+4\mu_0\rangle - 2|\mu\rangle + |\mu-4\mu_0\rangle\right) \tag{5.63}$$

と計算される．(5.62) と (5.63) により

$$\hat{C}_{\rm grav}|\mu\rangle \propto |V_{\mu+\mu_0} - V_{\mu-\mu_0}|\left(|\mu+4\mu_0\rangle - 2|\mu\rangle + |\mu-4\mu_0\rangle\right) \tag{5.64}$$

なので，$\langle\mu|\hat{C}_{\rm grav}|\Psi\rangle = 0$ から (5.59) が得られる．

運動学的 Hilbert 空間の超選択則についてもコメントしておきたい．(5.59) を見ると，基底 $\{|\mu\rangle : \mu = \epsilon + 4n\mu_0, n \in Z\}$ によって張られる $\mathcal{H}_{\rm kin}^{\rm grav}$ の部分空間 $\mathcal{H}_\epsilon$（ただし，$\epsilon \in [0, 4\mu_0)$）は Hamiltonian 拘束条件の作用に対して閉じている．より正確に言うと，運動学的 Hilbert 空間は Hamiltonian 拘束条件の作用に対して次のように分解される．

$$\mathcal{H}_{\rm kin}^{\rm grav} = \bigoplus_{\epsilon\in[0,4\mu_0)} \mathcal{H}_\epsilon.$$

ここではこれを超選択則と呼び，この部分空間を超選択セクターと呼ぶことにする．

次に，(5.59) において特異点の有無を議論したい．古典論の一様等方モデルにおいては宇宙初期特異点，あるいは閉じた宇宙での宇宙終焉時の特異点を意味する．この延長で考えれば，量子論においては $\Psi(0)$ **の発散，あるいは定義できないことが時空の特異点と直結する**と解釈するのが自然であろう．この差分方程式の構造がどのようになっているか見てみよう．

$\mathcal{H}_\epsilon$ において，2 系列の初期データ $\Psi(\epsilon + 4N\mu_0)$ と $\Psi(\epsilon + 4(N+1)\mu_0)$ を与える．N は自然数とする．このとき $\Psi(\epsilon + 4(N-1)\mu_0)$ が決定できるかどうかはその係数が消えるかどうかに依存する．(5.35) 及び (5.59) から係数が消えるのは $\mu = 0$ と $\pm 4\mu_0$ の箇所であることがわかる．従って，$\epsilon \in (0, 4\mu_0)$ であれば係数が消えることなく，$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ として $\Psi(\epsilon + 4n\mu_0)$ の値を一意的に決定できる．この様子を模式的に表したのが図 5.2 である．過去に遡ると $\Psi(0)$ を飛び越えてさらに過去に向かうことができ，再び体積固有値は大きくなっていく．

$\mathcal{H}_0$ については $\mu = 0$ と $\pm 4\mu_0$ のとき，差分方程式から $\Psi(0)$ が消えることがわかる．このため，初期データ $\Psi(4N\mu_0)$ と $\Psi(4(N+1)\mu_0)$ を与え，同様な操作を行うと $\Psi(8\mu_0)$ と $\Psi(4\mu_0)$ を決めても $\Psi(0)$ を決定することはできない．これは一見すると先程と違って過去に遡れなくなりそうだが，実は $\Psi(4\mu_0)$ 単独から $\Psi(-4\mu_0)$ を決めることができる．このようにして $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$ に対し，$\Psi(4n\mu_0)$ は一意的に定まる．$\Psi(0)$ **は決定されないものの，$\mu = 0$ を超えて発展方程式を遡ることができる**のである．このような場合も含め，ループ量子重力理論では特異点が回避された，と呼んでいる．この基準に従えば，$\epsilon \neq 0$ の場合は初期特異点がないことがわかるので，$\epsilon = 0$ の場合のみ詳しく議論する必要がある．この問題については後で振り返ることにする．古典論の立場から言えば $\mu = 0$ における波動関数が定まらないことは初期特異点と直結しているため，異論はあるだろうし，より慎重な議論が必要な点である．

次に，以下の演算子順序を考える．

$$\hat{C}_{\rm grav} = \frac{3i\,({\rm sgn}(p))}{4\pi^2\gamma^3 G^2 \mu_0^3}\widehat{EE}\hat{F}\ . \tag{5.65}$$

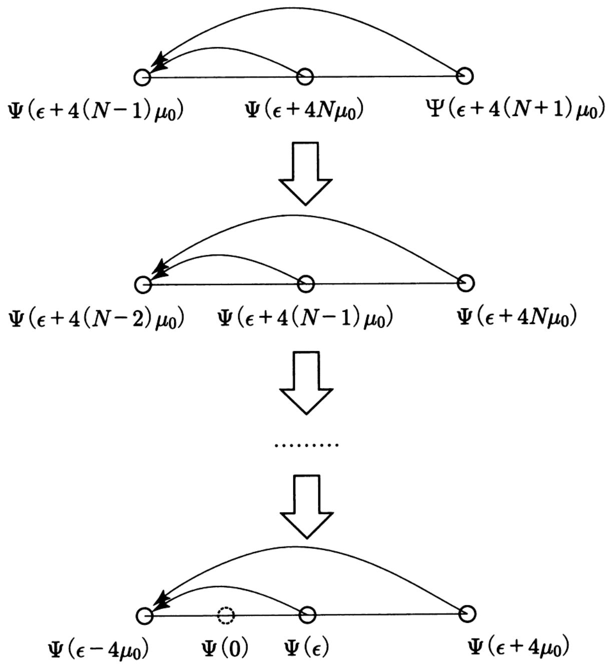


図 5.2　差分方程式による波動関数の決定.

この場合の差分方程式は

$$|-V_{\mu+\mu_0}+V_{\mu-\mu_0}|\left(\Psi(\mu+4\mu_0)-2\Psi(\mu)+\Psi(\mu-4\mu_0)\right)=0 \quad (5.66)$$

であり，$\mu=0$ の場合，この式は自明となってしまい，$\Psi(4\mu_0)$ と $\Psi(0)$ から $\Psi(-4\mu_0)$ を決定することはできない．従って，$\mu>0$ の場合の $\Psi(\mu)$ から $\mu=0$ を超えて $\mu<0$ の場合の $\Psi(\mu)$ を決定することはできない．この意味で $\mu=0$ に初期特異点を持つと言える．

ただし，フェルミオンがなければ波動関数は μ の偶関数に選んでもよく，これに従えば $\mu<0$ の場合の $\Psi(\mu)$ も決定されることが議論されている[56]．しかしながら一般的な議論とは言えず，特異点の回避は演算子順序による，というのが結論である．それでは特異点回避されるように演算子順序を定めるべきなのであろうか？ 上述のように特異点回避と言ってもナイーブなものであるので，そこまで議論するのは時期尚早であると思われる．

5.4.2　等体積離散化を用いた場合

この場合，$\widehat{1/\bar{\mu}^3}$ の順序にも気を付ける必要がある．$\widehat{EE}$ と $\widehat{1/\bar{\mu}^3}$ は可換であるが，$\hat{F}$ と $\widehat{1/\bar{\mu}^3}$ は可換ではない．そのため，$\widehat{1/\bar{\mu}^3}$ を分割して $\hat{F}$ の前後に置いてもよいがこうした可能性については後で議論することにすると次の 4 つの演算子順序が考えられる．

$$\hat{C}^{(a)}_{\rm grav}=\frac{3i(\mathrm{sgn}(p))}{4\pi^2\gamma^4G^2}\hat{F}\widehat{\frac{1}{\bar{\mu}^3}}\widehat{EE}\,, \quad (5.67)$$

$$\hat{C}^{(b)}_{\rm grav} = \frac{3i(\mathrm{sgn}(p))}{4\pi^2\gamma^4G^2}\widehat{\frac{1}{\bar{\mu}^3}}\hat{F}\widehat{EE}\ , \tag{5.68}$$

$$\hat{C}^{(c)}_{\rm grav} = \frac{3i(\mathrm{sgn}(p))}{4\pi^2\gamma^4G^2}\widehat{EE}\widehat{\frac{1}{\bar{\mu}^3}}\hat{F}\ , \tag{5.69}$$

$$\hat{C}^{(d)}_{\rm grav} = \frac{3i(\mathrm{sgn}(p))}{4\pi^2\gamma^4G^2}\widehat{EE}\hat{F}\widehat{\frac{1}{\bar{\mu}^3}}\ . \tag{5.70}$$

順に (a), (b), (c), (d) と呼ぶ．$\Phi(v) = \langle v|\Phi\rangle$ として (a)〜(d) の Hamiltonian 拘束条件から，

$$|v+4|\,||v+3|-|v+5||\,\Phi(v+4) - 2|v|\,||v-1|-|v+1||\,\Phi(v)$$
$$+|v-4|\,||v-5|-|v-3||\,\Phi(v-4) = 0\ , \tag{5.71}$$

$$|v|\,||v+5|-|v+3||\,\Phi(v+4) - 2|v|\,||v+1|-|v-1||\,\Phi(v)$$
$$+|v|\,||v-3|-|v-5||\,\Phi(v-4) = 0\ , \tag{5.72}$$

$$|v|\,||v+1|-|v-1||\,\Phi(v+4) - (2|v|\,||v+1|-|v-1||\,\Phi(v)$$
$$+|v|\,||v+1|-|v-1||\,\Phi(v-4) = 0\ , \tag{5.73}$$

$$|v+4|\,||v+1|-|v-1||\,\Phi(v+4) - 2|v|\,||v+1|-|v-1||\,\Phi(v)$$
$$+|v-4|\,||v+1|-|v-1||\,\Phi(v-4) = 0\ . \tag{5.74}$$

どの方程式からも $\Phi(0)$ の係数が消えてしまい，$\Phi(0)$ は現れないことがわかる．しかし，(5.71) だけが $\Phi(4)$ から $\Phi(-4)$ を決定することができ，次の結論を得る．$v > 0$ の全ての $\Phi(v)$ が与えられたとする．このとき，(a) だけが $v < 0$ の全ての $\Phi(v)$ を決定できる．従って，前述の基準に従えば (a) だけが特異点を回避している．

さらに一般に次のように特異点回避を議論できる．**体積作用素 $\hat{V}$ あるいはその正べきが $\hat{F}$ の左側にあるとき，特異点は現れる．**ただし，逆は成り立たない．簡単のため，拘束条件が $C = FV = 0$ の形をしていたとしよう．量子論では $\hat{C}_1 = \hat{V}\hat{F}$ と $\hat{C}_2 = \hat{F}\hat{V}$ の 2 通りの演算子順序があり，$|v\rangle$ に作用して

$$\hat{C}_1|v\rangle = \hat{V}\hat{F}|v\rangle = -\frac{1}{16}\big(V_{v+4}|v+4\rangle - 2V_v|v\rangle + V_{v-4}|v-4\rangle\big), \tag{5.75}$$

$$\hat{C}_2|v\rangle = \hat{F}\hat{V}|v\rangle = -\frac{V_v}{16}\big(|v+4\rangle - 2|v\rangle + |v-4\rangle\big)\ . \tag{5.76}$$

$\Phi(v)$ の満たすべき方程式としては，$\hat{C}_1$ については

$$V_v\big(\Phi(v+4) - 2\Phi(v) + \Phi(v-4)\big) = 0, \tag{5.77}$$

$\hat{C}_2$ については

$$V_{v+4}\Phi(v+4) - 2V_v\Phi(v) + V_{v-4}\Phi(v-4) = 0 \tag{5.78}$$

となる．(5.77) では $v = 0$ で全ての係数が消えてしまい，$\Phi(4)$ と $\Phi(0)$ から $\Phi(-4)$ を決定できない．一方，(5.78) では $v = 0$ を超えて解を決定できる．

5.4.3 スカラー曲率の振る舞い

古典論において，初期特異点ではスカラー曲率が発散しており，それは a^{-1} の発散と直結している．ループ量子宇宙論では a^{-1} も次の方法で正則化される．Poisson 括弧は (5.16) と同様に計算でき

$$\left\{c, V^{\frac{2l}{3}}\right\} = \mathrm{sgn}(p)\frac{8\pi\gamma Gl}{3}|p|^{l-1} \tag{5.79}$$

である．ここで $V = |p|^{3/2}$ を用いており，l は任意のパラメーターである．もし $0 < l < 1$ であれば，右辺は p の逆べきになっていることを意味する．一方で左辺は体積の正べきを含む．この性質を用いて a^{-1} を

$$a^{-1} = \frac{V_0^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{|p|}} = \left(\frac{3\mathrm{sgn}(p)}{8\pi\gamma Gl}\left\{c, V^{\frac{2l}{3}}\right\}\right)^{\frac{1}{2(1-l)}} V_0^{\frac{1}{3}} \tag{5.80}$$

と書き換える．ここで $|p| = V_0^{2/3}a^2$ を使っている．そうするとホロノミーを用いて

$$a^{-1} = \left[\frac{\mathrm{sgn}(p)}{4\pi\gamma Gl\bar{\mu}}\mathrm{Tr}\left(\sum_I \tau^I h_I^{(\bar{\mu})}\left\{h_I^{(\bar{\mu})-1}, V^{\frac{2l}{3}}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{2(1-l)}} V_0^{\frac{1}{3}} \tag{5.81}$$

と書き換えることができる．ここでは等体積離散化の場合の $\lambda = \bar{\mu}$ を用いている．これを量子化し，(5.54) を用いると，

$$\hat{a}^{-1} = \left[-\frac{3i(\mathrm{sgn}(p))}{4\pi\gamma Gl}\left(\frac{6}{8\pi\gamma G}\right)^{1/2}\left(\frac{K\hat{V}}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right.$$
$$\left.\times\left(\mathrm{S}\hat{V}^{\frac{2l}{3}}\mathrm{C} - \mathrm{C}\hat{V}^{\frac{2l}{3}}\mathrm{S}\right)\right]^{\frac{1}{2(1-l)}} V_0^{\frac{1}{3}}\ . \tag{5.82}$$

従って，$|v\rangle$ に作用すると，

$$\hat{a}^{-1}|v\rangle = \left[\frac{3\mathrm{sgn}(p)}{8\pi\gamma Gl}\left(\frac{6}{8\pi\gamma G}\right)^{1/2}\left(\frac{KV_v}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right.$$
$$\left.\times\left(V_{v+1}^{\frac{2l}{3}} - V_{v-1}^{\frac{2l}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2(1-l)}} V_0^{\frac{1}{3}}|v\rangle\ . \tag{5.83}$$

この固有値は $v = 0$ **でも発散**しないことは注目に値する．これは特異点回避を示唆するが，古典論の場合でもスカラー曲率だけを特異点回避の基準とするには不十分であった．量子論の場合には少なくとも波動関数の振る舞いを調べる必要があり，これを調べたのが 5.4.1 節及び 5.4.2 節である．

5.5 物質場と特異点回避

古典論における特異点定理では，物質場のエネルギー条件が一つの鍵となっ

ており，ループ量子重力理論においても無視することはできない．ここでは物質場の Hamiltonian 拘束条件について議論する．任意の物質場を ϕ で表すことにして，物質場の Hamiltonian 拘束条件が $a^r\epsilon(a,\phi)$ の形で表せることを仮定する．r は定数，$\epsilon(a,\phi)$ は物質場の関数であり，$a\to 0$ の極限で $\epsilon(a,\phi)$ は 0 でない有限の値を取るものとする．等体積離散化の場合で計算するが，等面積離散化の場合でも結論は変わらない．

最初に $r<0$ の場合を考える．物質場の Hamiltonian 拘束条件は

$$C_{\rm matt}=\left[\frac{{\rm sgn}(p)}{4\pi\gamma Gl\bar{\mu}}{\rm Tr}\left(\sum_I \tau^I h_I^{(\bar{\mu})}\left\{h_I^{(\bar{\mu})-1},V^{\frac{2l}{3}}\right\}\right)\right]^{\frac{r}{2(l-1)}}V_0^{-\frac{r}{3}}\epsilon(a,\phi)$$

と書き換えることができる．これを量子化し，(5.54) を用いると，

$$\begin{aligned}\hat{C}_{\rm matt}=&\left[-\frac{3i({\rm sgn}(p))}{4\pi\gamma Gl}\left(\frac{6}{8\pi\gamma G}\right)^{1/2}\left(\frac{K\hat{V}}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right.\\&\left.\times\left({\rm S}\hat{V}^{\frac{2l}{3}}{\rm C}-{\rm C}\hat{V}^{\frac{2l}{3}}{\rm S}\right)\right]^{\frac{r}{2(l-1)}}V_0^{-\frac{r}{3}}\widehat{\epsilon(a,\phi)}\ .\end{aligned}\tag{5.84}$$

従って，$|v\rangle$ に作用すると，

$$\begin{aligned}\hat{C}_{\rm matt}|v\rangle=&\left[\frac{3{\rm sgn}(p)}{8\pi\gamma Gl}\left(\frac{6}{8\pi\gamma G}\right)^{1/2}\left(\frac{KV_v}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(V_{v+1}^{\frac{2l}{3}}-V_{v-1}^{\frac{2l}{3}}\right)\right]^{\frac{r}{2(l-1)}}\\&\times V_0^{-\frac{r}{3}}\epsilon_0(a,\phi)|v\rangle\ ,\end{aligned}\tag{5.85}$$

ただし，$\epsilon_0(a,\phi)$ は $\widehat{\epsilon(a,\phi)}$ の固有値である．従って，$|v\rangle$ は $\hat{C}_{\rm matt}$ の固有状態であり，$v=0$ で消える．そのため $\Phi(0,\phi)$ を除く係数 $\Phi(v,\phi)$ を一意的に決定できる．従って，$r<0$ であれば特異点の有無には影響を与えない．

次に，$r=0$ の場合を考える．物質場の Hamiltonian 拘束条件は $C_{\rm matt}=\epsilon(a,\phi)$ である．$|v\rangle$ に作用し，

$$\hat{C}_{\rm matt}|v\rangle=\epsilon_0(a,\phi)|v\rangle\ .\tag{5.86}$$

この場合も $|v\rangle$ は $\hat{C}_{\rm matt}$ の固有状態であるが，$v=0$ でもその固有値は消えない．従ってこの場合には $\Phi(0,\phi)$ を決定できず，$v<0$ を超えて $\Phi(v,\phi)$ を得ることはできない．物質場の存在によって特異点が現れてしまうのである．

最後に $r>0$ の場合，$|v\rangle$ に作用し，

$$\hat{C}_{\rm matt}|v\rangle=V_v^{\frac{r}{3}}\epsilon_0(a,\phi)|v\rangle\ .\tag{5.87}$$

$\hat{C}_{\rm matt}$ は $|v\rangle$ の固有状態であり，$v=0$ で消える．従って，$r<0$ の場合と同様に特異点の有無には影響を与えない．

宇宙項 Λ の場合は

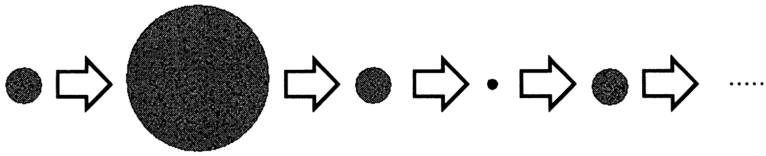


図 5.3　膨張と収縮を繰り返す宇宙.

$$\hat{C}_\Lambda = \frac{\Lambda \hat{V}}{8\pi G} \tag{5.88}$$

であるから $r > 0$ の場合に相当し，特異点の有無には影響を与えない．従って宇宙項の場合を含む $r \neq 0$ で曲率が正の場合の時空描像は次のようなものを示唆する．膨張から収縮に転じ，古典論でビッグクランチに相当する時期を迎えても $\Phi(0)$ を通り抜けて再び膨張を始める．以下この繰り返しである (図 5.3)．これは第 3 章で議論した宇宙の無からの創生のシナリオとは大きく異なる．ポイントは Planck スケールで時空の発展が離散化されている点にある．原理的な問題である “最初の” 宇宙の創生という点には答えないままである．また，このシナリオで問題となるのがエントロピーの問題である．時間を逆回ししているわけではないので，エントロピーは増える一方である．色々議論はあるようだが，この問題に対する決定的な解決案は出されていないと思われる．

第 6 章
ループ量子宇宙論II：応用編

一様等方宇宙において，格子サイズを決めるパラメーター λ の決め方次第では体積固有値が大きい状況，小さい状況の両方の物理に不合理な結論をもたらしてしまうため，物理的に選び方を考慮することが重要である点を説明する．また，これと関係したインフレーションモデルの変遷も説明する．

6.1 体積固有値が大きい極限

これまで等面積離散化と等体積離散化の特異点回避を比較したが，これだけでは両者の優越は見えてこない．しかし，物質場や宇宙項などのスケールが入った場合，体積固有値が大きい極限で等面積離散化の欠点が浮き彫りになる．ここでは宇宙項を入れてその様子を見てゆく[59]．この場合，前章と同じ状況での Hamiltonian 拘束条件は次のように変更される．

$$C_{\rm grav} = \frac{1}{16\pi\gamma^2 G}\int_{\mathcal{V}} d^3x\left(\frac{-1}{\sqrt{|E|}}\epsilon^{IJK}F^I_{ab}E^a_J E^b_K + 2\gamma^2\sqrt{|E|}\Lambda\right) . \quad (6.1)$$

6.1.1 離散化を行わない Wheeler–DeWitt 方程式の場合

ループ量子重力理論のような離散化はしないが，変数 c と p は用いることにする．Poisson 括弧 (5.10) を量子化すると

$$[\hat{c},\hat{p}] = \frac{8i\pi\gamma G}{3} . \quad (6.2)$$

Hamiltonian 拘束条件は

$$C_{\rm grav} = \frac{1}{16\pi\gamma^2 G}\left(-6c^2\sqrt{|p|} + 2\gamma^2\Lambda|p|^{\frac{3}{2}}\right) = 0 . \quad (6.3)$$

これを量子化し，$\hat{C}_{\rm grav}\Psi = 0$ を考える．ここではこれを Wheeler–DeWitt (WDW) 方程式と呼び，次の 3 つの演算子順序を考える．

$$\hat{C}^{(1)}_{\rm grav} = \frac{1}{16\pi\gamma^2 G}\left(-6\hat{c}^2\sqrt{|\hat{p}|} + 2\gamma^2\Lambda|\hat{p}|^{\frac{3}{2}}\right) \ , \tag{6.4}$$

$$\hat{C}^{(2)}_{\rm grav} = \frac{1}{16\pi\gamma^2 G}\left(-6\sqrt{|\hat{p}|}\hat{c}^2 + 2\gamma^2\Lambda|\hat{p}|^{\frac{3}{2}}\right) \ , \tag{6.5}$$

$$\hat{C}^{(3)}_{\rm grav} = \frac{1}{16\pi\gamma^2 G}\left(-6\hat{c}\sqrt{|\hat{p}|}\hat{c} + 2\gamma^2\Lambda|\hat{p}|^{\frac{3}{2}}\right) \ . \tag{6.6}$$

通常の Schrödinger 表現を採用すると,

$$\hat{p}\Psi = p\Psi, \quad \hat{c}\Psi = \frac{8i\pi\gamma G}{3}\frac{d\Psi}{dp} \tag{6.7}$$

であり, (6.4)~(6.6) からは次の方程式を得る.

$$\begin{aligned}\hat{C}^{(1)}_{\rm grav}\Psi^{(1)} &= \frac{8\pi G}{3}\left(\sqrt{|p|}\frac{d^2\Psi^{(1)}}{dp^2} + \frac{{\rm sgn}(p)}{\sqrt{|p|}}\frac{d\Psi^{(1)}}{dp}\right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{4}|p|^{-\frac{3}{2}}\Psi^{(1)}\right) + \frac{\Lambda}{8\pi G}|p|^{\frac{3}{2}}\Psi^{(1)} = 0 \ ,\end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\hat{C}^{(2)}_{\rm grav}\Psi^{(2)} = \frac{8\pi G}{3}\sqrt{|p|}\frac{d^2\Psi^{(2)}}{dp^2} + \frac{\Lambda}{8\pi G}|p|^{\frac{3}{2}}\Psi^{(2)} = 0 \ , \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}\hat{C}^{(3)}_{\rm grav}\Psi^{(3)} &= \frac{8\pi G}{3}\left(\sqrt{|p|}\frac{d^2\Psi^{(3)}}{dp^2} + \frac{{\rm sgn}(p)}{2\sqrt{|p|}}\frac{d\Psi^{(3)}}{dp}\right) \\ &\qquad + \frac{\Lambda}{8\pi G}|p|^{\frac{3}{2}}\Psi^{(3)} = 0 \ .\end{aligned} \tag{6.10}$$

(6.8)~(6.10) の一般解は, $p \geq 0$ として

$$\Psi^{(1)} = p^{-\frac{1}{2}}\left[C_1{\rm Ai}\left(-\alpha_3^{\frac{1}{3}}p\right) + C_2{\rm Bi}\left(-\alpha_3^{\frac{1}{3}}p\right)\right] \ , \tag{6.11}$$

$$\Psi^{(2)} = C_1{\rm Ai}\left(-\alpha_3^{\frac{1}{3}}p\right) + C_2{\rm Bi}\left(-\alpha_3^{\frac{1}{3}}p\right) \ , \tag{6.12}$$

$$\Psi^{(3)} = p^{\frac{1}{4}}\left[C_1{\rm J}_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\alpha_3}p^{\frac{3}{2}}\right) + C_2{\rm J}_{\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\alpha_3}p^{\frac{3}{2}}\right)\right] \ . \tag{6.13}$$

C_1 と C_2 は定数, Ai と Bi は Airy 関数, ${\rm J}_{\pm\frac{1}{6}}$ は Bessel 関数で, $\alpha_3 := 3|\Lambda|/(8\pi G)^2$ と定義する. いずれの波動関数も $p \to \infty$ では**減衰振動する**という特徴を持つ.

6.1.2 等面積離散化を用いた場合

ここでは $\Psi(\mu)$ の μ が大きくなったときの振る舞いを調べる. 宇宙が大きければ WDW 方程式の解としての波動関数に近づくと期待される. 帰納的関係式 (5.59) に宇宙項を加えれば,

$$\begin{aligned}&|V_{\mu+5\mu_0} - V_{\mu+3\mu_0}|\,\Psi(\mu+4\mu_0) \\ &- 2\left(|V_{\mu+\mu_0} - V_{\mu-\mu_0}| - \frac{16\pi\gamma^3 G\mu_0^3}{3}\Lambda V_\mu\right)\Psi(\mu) \\ &+ |V_{\mu-3\mu_0} - V_{\mu-5\mu_0}|\,\Psi(\mu-4\mu_0) = 0 \ .\end{aligned} \tag{6.14}$$

$\mu \gg \mu_0$ であれば

$$\Psi(\mu+4\mu_0)-\left(2-\frac{1}{3}\mu\mu_0^2\tilde{\Lambda}\right)\Psi(\mu)+\Psi(\mu-4\mu_0)=0\ . \tag{6.15}$$

ただし，$\tilde{\Lambda}=\frac{16\pi\gamma^3 G}{3}\Lambda$ である．もし $|\mu\mu_0^2\tilde{\Lambda}/6| \ll 1$ であれば

$$\Psi(\mu_0+4n\mu_0)\approx An+B \tag{6.16}$$

のように解ける．ただし，A と B は定数である．一方，$|\mu\mu_0^2\tilde{\Lambda}/6| \gg 1$ であれば (6.15) の左辺の最後の項を無視することができ，

$$\Psi(\mu+4\mu_0)\approx\left(2-\frac{1}{3}\mu\mu_0^2\tilde{\Lambda}\right)\Psi(\mu)\ . \tag{6.17}$$

$(2-\mu\mu_0^2\tilde{\Lambda}/3)$ は宇宙項の符号によって正負が決まる．いずれの場合も，仮定によって絶対値は 1 よりもずっと大きいはずである．従って，$\Psi(\mu)$ は各ステップごとの絶対値の増大が非常に大きく，指数関数的である．そのため，宇宙が非常に大きい状況であるにもかかわらず，波動関数の振る舞いは WDW 方程式の解とは著しく異なる．図 6.1 は (6.14) を数値的に解いて Ψ を求めたもので，$\mu_0^3\tilde{\Lambda}=0.005$ に選んである．また，初期条件 $\Psi(-4\mu_0)=-1$, $\Psi(0)=0$ を用いた[59]．

次に差分方程式と微分方程式の対応を見てゆくことにする．等面積離散化の場合の，演算子順序 (5.56) と (5.65) の場合の体積固有値が大きい極限を考える．(5.56) から

$$\langle\mu|\hat{C}_{\rm grav}|\Psi\rangle=\frac{3}{128\pi^3\gamma^3G^2\mu_0^3}\Big[|V_{\mu+5\mu_0}-V_{\mu+3\mu_0}|\,\Psi(\mu+4\mu_0)$$

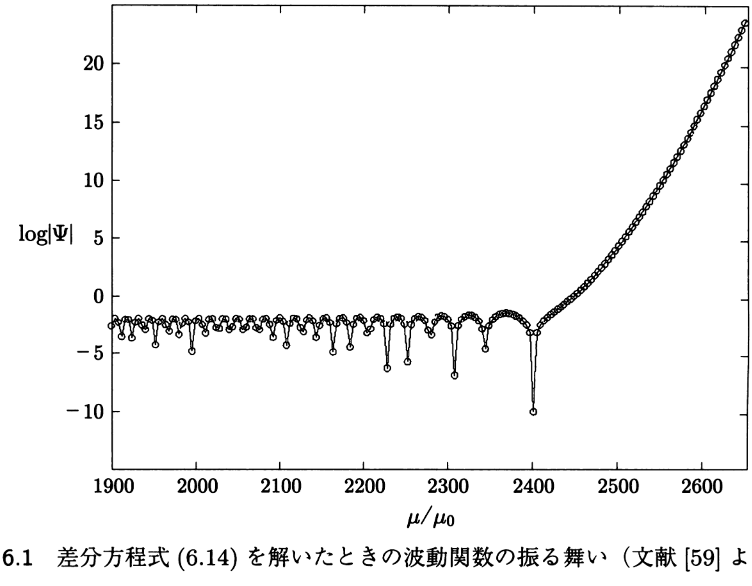


図 6.1　差分方程式 (6.14) を解いたときの波動関数の振る舞い（文献 [59] より）．

$$
-\left(2\left|V_{\mu+\mu_0}-V_{\mu-\mu_0}\right|-\frac{16\pi\gamma^3G\mu_0^3}{3}\Lambda V_\mu\right)\Psi(\mu)
+\left|V_{\mu-3\mu_0}-V_{\mu-5\mu_0}\right|\Psi(\mu-4\mu_0)\Big] . \tag{6.18}
$$

$\mu \gg \mu_0$ のとき，$(V_{\mu+L\mu_0}-V_{\mu+M\mu_0})$ を μ_0 の周りで展開すると

$$
V_{\mu+L\mu_0}-V_{\mu+M\mu_0} \simeq \left(\frac{8\pi\gamma G}{6}\right)^{3/2}\mu^{3/2}\left\{\frac{3}{2}(L-M)\frac{\mu_0}{\mu}
+\frac{3}{8}(L^2-M^2)\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2-\frac{1}{16}(L^3-M^3)\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^3\right\} . \tag{6.19}
$$

これを (6.18) に代入すると

$$
\begin{aligned}
\langle\mu|\hat{C}_{\rm grav}|\Psi\rangle \simeq& \frac{3}{128\pi^3\gamma^3G^2\mu_0^3}\left(\frac{8\pi\gamma G}{6}\right)^{3/2}\mu^{3/2}\\
&\times\left[3\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)\{\Psi(\mu+4\mu_0)-2\Psi(\mu)+\Psi(\mu-4\mu_0)\}\right.\\
&+6\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2\{\Psi(\mu+4\mu_0)-\Psi(\mu-4\mu_0)\}\\
&-\frac{1}{8}\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^3\{\Psi(\mu+4\mu_0)-2\Psi(\mu)+\Psi(\mu-4\mu_0)\}\\
&\left.-6\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^3\{\Psi(\mu+4\mu_0)+\Psi(\mu-4\mu_0)\}+\frac{16\pi\gamma^3G\mu_0^3}{3}\Lambda\Psi(\mu)\right] .
\end{aligned} \tag{6.20}
$$

波動関数は充分ゆっくり変化するとし，μ の周りで $\Psi(\mu\pm4\mu_0)$ を展開すると，

$$
\Psi(\mu\pm4\mu_0)=\Psi(\mu)\pm\frac{d\Psi(\mu)}{d\mu}(4\mu_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2\Psi(\mu)}{d\mu^2}(16\mu_0^2)\pm\frac{1}{6}\frac{d^3\Psi(\mu)}{d\mu^3}(64\mu_0^3) .
$$

これを (6.20) に代入すると

$$
\langle\mu|\hat{C}_{\rm grav}|\Psi\rangle \simeq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi^3\gamma^3G}}\left[\frac{d^2}{d\mu^2}\left(\sqrt{\mu}\Psi(\mu)\right)+\frac{\pi\gamma^3G}{9}\mu^{3/2}\Lambda\Psi(\mu)\right] . \tag{6.21}
$$

$\mu\propto p$ なので，これは WDW 方程式 (6.10) と等価である．同様に，(5.65) については (6.9) と等価な次式を得る．

$$
\langle\mu|\hat{C}_{\rm grav}|\Psi\rangle \simeq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi^3\gamma^3G}}\left[\sqrt{\mu}\frac{d^2}{d\mu^2}\Psi(\mu)+\frac{\pi\gamma^3G}{9}\mu^{3/2}\Lambda\Psi(\mu)\right] . \tag{6.22}
$$

従って，波動関数が充分ゆっくり変化すれば，宇宙が大きいときに差分方程式と WDW 方程式から得られる波動関数は同様な振る舞いをするはずである．

6.1.3 等体積離散化を用いた場合

演算子順序の不定性を考えなければ，Hamiltonian 拘束条件は

$$\hat{C}_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi\gamma^2 G}\left(\frac{96i(\text{sgn}(p))}{8\pi\gamma G}\frac{1}{\bar{\mu}^3}\text{S}^2\text{C}^2 \right.$$
$$\left. \times\left[\text{S}\hat{V}\text{C} - \text{C}\hat{V}\text{S}\right] + 2\gamma^2\Lambda\hat{V}\right) \tag{6.23}$$

と書ける．$\bar{\mu}$ は p の関数のため，$1/\bar{\mu}^3$ もまた演算子になることに注意する．次の演算子順序を考える．

$$\hat{C}_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi\gamma^2 G}\left(\frac{96i(\text{sgn}(p))}{8\pi\gamma G}\hat{F}\widehat{\frac{1}{\bar{\mu}^3}}\widehat{EE} + 2\gamma^2\Lambda\hat{V}\right) . \tag{6.24}$$

Hamiltonian 拘束条件から得られる差分方程式は

$$|v+4|\,||v+3|-|v+5||\,\Phi(v+4)$$
$$-\left(2|v|\,||v-1|-|v+1|| - \frac{16\sqrt{3}\pi}{3}\gamma^3 G\Lambda|v|\right)\Phi(v)$$
$$+\,|v-4|\,||v-5|-|v-3||\,\Phi(v-4) = 0 \tag{6.25}$$

である．ここでは $|v| \gg 1$ と $\Phi(v)$ がゆっくり変化すると仮定すると

$$\frac{d^2}{dv^2}\left(|v|\Phi(v)\right) + \frac{4\pi}{81}\gamma^3\frac{G}{K^2}\Lambda|v|\Phi(v) + O\left(\frac{d^3\Phi(v)}{dv^3}\right) = 0 . \tag{6.26}$$

この方程式は WDW 方程式で近似されることがわかる．他の演算子順序についても同様である．この左辺第 3 項を無視した場合の一般解は

$$\Phi(v) = \frac{1}{v}\left(C_1 e^{i\sqrt{\alpha_2}v} + C_2 e^{-i\sqrt{\alpha_2}v}\right) \tag{6.27}$$

であり，C_1, C_2 は定数，$\alpha_2 := \frac{4\pi}{81K^2}\gamma^3 G|\Lambda|$ である．

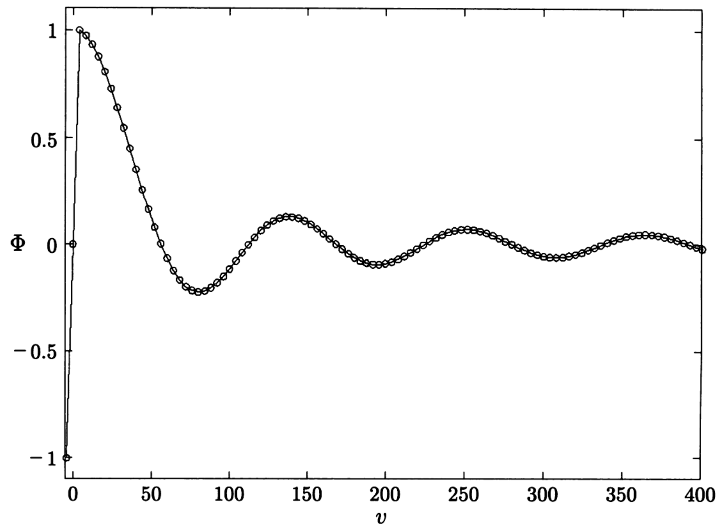


図 6.2　差分方程式 (6.25) を解いたときの波動関数の振る舞い（文献 [59] より）．$0 \le v \le 400$ の領域．

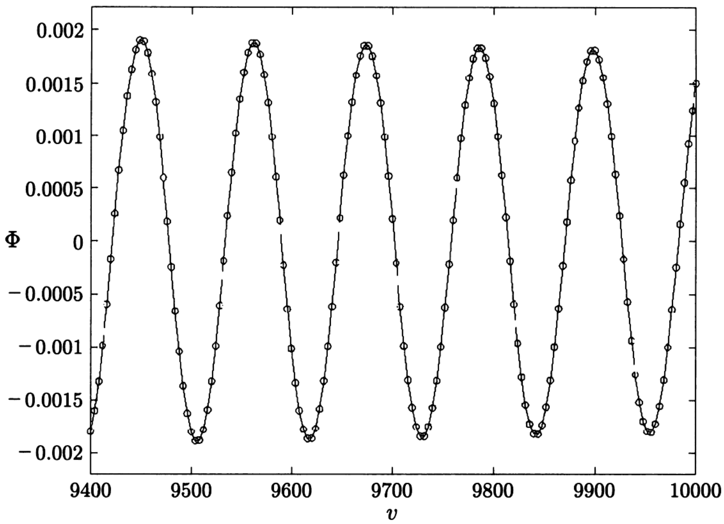


図 6.3 差分方程式 (6.25) を解いたときの波動関数の振る舞い（文献 [59] より）. $9400 \leq v \leq 10000$ の領域.

一方，差分方程式 (6.25) を解いた様子を示したものが図 6.2 及び図 6.3 である．ここでは $\sqrt{3}\tilde{\Lambda} = 0.1$ に選んであり，初期条件 $\Phi(-4) = -1$, $\Phi(0) = 0$ を用いた[59]．(6.27) が良い近似になっていることがわかる．従って，等面積離散化の場合の問題点は，等体積離散化では解消される．

6.2 バウンスシナリオ

(5.83) で見たように，ループ量子宇宙論では $\hat{a}^{-1}$ の固有値は発散しない．この性質が初期宇宙にどのような影響を及ぼすか，物質場と組み合わせるとどのような効果をもたらすのかを考えるのは自然なことである．Ashtekar 達は，質量のないスカラー場と組み合わせることで，スカラー場が斥力的な役割を果たし，宇宙の大きさが一定より小さくなるのを妨げる**バウンス**というシナリオが考えられることを見出した．しかし，等面積離散化にはここにも大きな問題点がある[55]．量子重力的な効果なので，Planck 密度程度で一般相対性理論との違いが期待されるが，基本セルの選び方によって，物質場密度が Planck 密度より遥かに小さい状況下でも宇宙初期のシナリオを変えてしまうのだ．この問題もまた等体積離散化によって解決される[60]．

質量のないスカラー場の Hamiltonian 拘束条件は $p_\phi := \dot{\phi}$ として，

$$C_{\mathrm{matt}} = \frac{|p|^{-3/2}}{2} p_\phi^2 \tag{6.28}$$

である．5.5 節の $a^r \epsilon(a, \phi)$ との対応で言えば $r = -3$ なので特異点回避の有無には影響を与えない．ここでは Ashtekar 達に従って等体積離散化を考え，(5.83) において $l = 1/2$, $V_0 = 1$ とすると[56]

$$\widehat{|p|}^{-3/2}\Phi(v,\phi)=\left(\frac{6}{8\pi\gamma G}\right)^{3/2}B(v)\Phi(v,\phi) \tag{6.29}$$

と書ける．ただし，

$$B(v)=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}K|v|\left||v+1|^{1/3}-|v-1|^{1/3}\right|^{3} \tag{6.30}$$

である．

$$\hat{C}\Phi(v,\phi):=(\hat{C}_{\mathrm{grav}}+\hat{C}_{\mathrm{matt}})\Phi(v,\phi)=0 \tag{6.31}$$

からは形式的に

$$\partial_{\phi}^{2}\Phi(v,\phi)=-\Theta\Phi(v,\phi) \tag{6.32}$$

という形の式が得られる．これは ϕ を時間とみなしたときには Klein–Gordon 方程式と同じ形をしている．スケールファクター a を時間とみなすと，閉じた宇宙では a が小さくなる場合があるという不都合もあるため，ここでは**質量のないスカラー場 ϕ を時間とみなす**立場を取る．この $\Theta\Phi(v,\phi)$ の部分は演算子順序によるが，(5.58) を採用した場合には

$$\begin{aligned}\Theta\Phi(v,\phi)=&-[B(v)]^{-1}\left(C^{+}(v)\Phi(v+4,\phi)\right.\\&\left.+C^{0}(v)\Phi(v,\phi)+C^{-}(v)\Phi(v-4,\phi)\right)\ ,\end{aligned} \tag{6.33}$$

ただし，

$$\begin{aligned}C^{+}(v)&=\frac{3\pi KG}{8}|v+2|\,||v+1|-|v+3||\ ,\\C^{-}(v)&=C^{+}(v-4)\ ,\quad C^{0}(v)=-C^{+}(v)-C^{-}(v)\ .\end{aligned} \tag{6.34}$$

(6.33) を解くため，波束

$$\Phi(v,\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}dk\tilde{\Phi}(k)e^{i\omega\phi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[e_{k}^{+}(v)+e_{k}^{+}(-v)\right] \tag{6.35}$$

を用意する．ただし，$\omega^2=12\pi Gk^2$ であり，$e_k^+(v)$ は

$$\Theta e_{k}^{+}(v)=\omega^{2}e_{k}^{+}(v) \tag{6.36}$$

を満たすとする．また，

$$\tilde{\Phi}(k)=e^{-\left((k-k^{*})^{2}/2\sigma^{2}\right)}e^{-i\omega\phi^{*}} \tag{6.37}$$

であり，k^*,ϕ^* は波束のピークを表し，σ でその広がりを調節できる．ϕ を "時間" とみなして (6.33) を解き，v の期待値を求めたものが図 6.4 である．古典論 (classical) の場合が点線で描かれており，"時間発展" によって v の期待値が 0 から大きくなる場合と 0 に近づく場合の両方がある．一方，ループ量子宇宙論 (LQC) では v の期待値には最小の値 $v_{\min}\neq 0$ が存在する．v の期

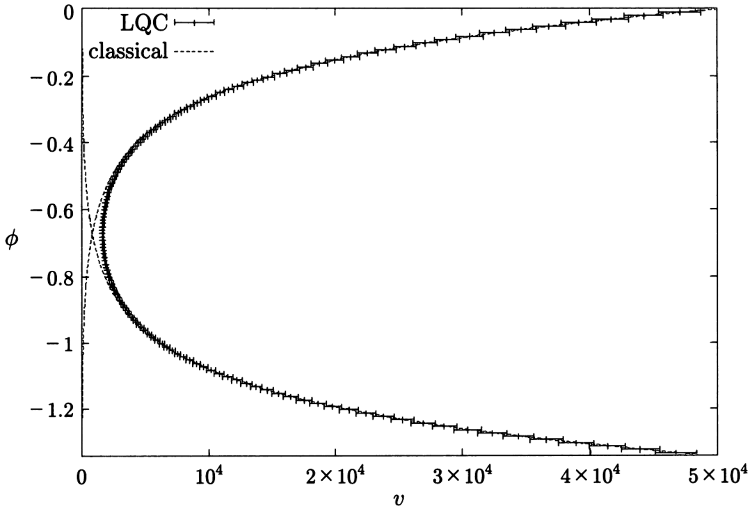


図 6.4　v の期待値と ϕ の関係（文献 [56] より）．ここでは $p_\phi^* := -\sqrt{12\pi G}k^* = 5\times10^3$，分散 $\Delta p_\phi/p_\phi^* = 0.025$ である．

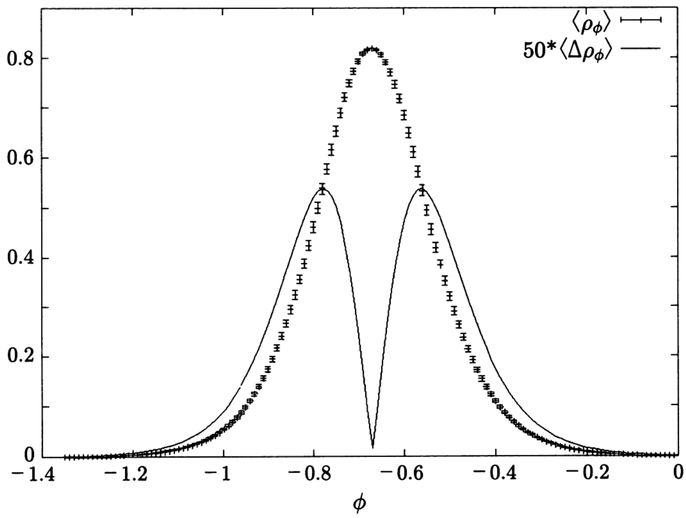


図 6.5　ϕ と $\langle\rho_\phi\rangle$ 及び $50\Delta\rho_\phi$ の関係（文献 [56] より）．ここでは $p_\phi^* := 10^4$，$\Delta p_\phi/p_\phi^* = 0.018$ である．

待値がどんどん小さくなっていって $v_{\rm min}$ を境にまた大きくなる様子をバウンスと呼んでいる．密度を $\rho_\phi = \frac{p_\phi^2}{2|p|^3}$ で定義すると，この最小の値を取るのは $\rho_{\rm crit} \simeq 0.82/G^2$ という Planck 密度のときである．

また，図 6.5 は ϕ と密度 $\langle\rho_\phi\rangle$ 及び分散 $50\Delta\rho_\phi$ の関係を示したものである．バウンスが生じる付近では密度 $\langle\rho_\phi\rangle$ は高くなっているのに対し，実線で描かれた分散は非常に小さくなっている．

このような振る舞い，特にバウンスが生じる $\rho_{\rm crit}$ の値は k^*, ϕ^* などの依存性が小さい．一方で当面積離散化を用いた場合には，p_ϕ を大きく取ることで $\rho_{\rm crit}$ が Planck 密度より遥かに小さくなってしまう．一体何が違うのだろう

か？ これを理解するため，次のような単純化した Hamiltonian を考える．

$$C_{\rm eff} = -\frac{3}{8\pi\gamma^2 G\bar{\mu}^2}|p|^{1/2}\sin^2(\bar{\mu}c) + \left(\frac{6}{8\pi\gamma G}\right)^{3/2}\frac{B(v)}{2}p_\phi^2 = 0\ . \quad (6.38)$$

基本的に (6.31) に出てくる $\hat{C}_{\rm grav} + \hat{C}_{\rm matt}$ をその固有値で置き換えたものである．重力パートは $\bar{\mu}c \ll 1$ で (6.3) に帰着する最低次の補正だけを考えている．また，$|v| > 1$ を仮定すると

$$B(v) = \frac{K}{|v|}\left[1 + \frac{5}{9}\frac{1}{|v|^2} + O\left(\frac{1}{|v|^4}\right)\right] \quad (6.39)$$

のように表せるが，ここでは最低次の項だけ考える．このとき

$$\dot{v} = \{v, H_{\rm eff}\} = \frac{2|v|^{1/3}}{\gamma\bar{\mu}K^{1/3}}\left(\frac{8\pi\gamma G}{6}\right)^{1/2}\sin(\bar{\mu}c)\cos(\bar{\mu}c) \quad (6.40)$$

である．(6.38) 及び (6.40) より Hubble 定数 H は

$$H^2 := \frac{\dot{v}^2}{9v^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_\phi\left(1 - \frac{\rho_\phi}{\rho_{\rm crit}}\right) \quad (6.41)$$

と表すことができ，

$$\rho_{\rm crit} := \frac{\sqrt{3}}{16\pi^2\gamma^3 G^2} \quad (6.42)$$

である．これは物質場のエネルギー密度が $\rho_{\rm crit}$ より大きくなれば宇宙の膨張に対しては斥力的に働くことを意味し，オーダーとしてはバウンスを起こす数値計算結果と矛盾しない．一方，当面積離散化の場合には同じ評価において

$$\rho_{\rm crit} := \left(\frac{3}{8\pi\gamma^2 G\mu_0^2}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{2}}{p_\phi} \quad (6.43)$$

と表すことができ，p_ϕ が大きければ物質場密度が Planck 密度より遥かに小さくてもバウンスを起こすという不合理な結果が得られている[55]．

6.3 インフレーションとループ量子宇宙論

ここではインフレーションシナリオがループ量子重力理論の効果によってどのような変更を受けるのかを考える．この問題は盛んに調べられ，宇宙論の分野でも大きな話題となった[61]．基本的にはスカラー場の Hamiltonian を

$$C_{\rm matt} = \frac{(a^{-3})_{\rm eff}}{2}p_\phi^2 + a^3V(\phi) \quad (6.44)$$

として $(a^{-3})_{\rm eff}$ はループ量子宇宙論の固有値に基づいて効果を取り入れる．$V(\phi)$ はスカラー場のポテンシャル項である．特異点回避を議論した (5.83) では $j = 1/2$ 表現を用いていたが，一般には

$$\hat{a}^{-3}|\mu\rangle = \left[\frac{9\mathrm{sgn}(p)}{8\pi\gamma G l j(j+1)(2j+1)}\sum_{m=-j}^{j} m V_{\mu+2m}^{\frac{2l}{3}}\right]^{\frac{3}{2(1-l)}} |\mu\rangle \quad (6.45)$$

である．これは等面積離散化の場合であり，簡単のため $V_0=\mu_0=1$ と置いている．等体積離散化の場合は，$1/\bar{\mu}^3$ に起因する $\left(\frac{6}{8\pi\gamma G}\right)^{1/2}\left(\frac{KV_v}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$ のファクターが入る．

(6.44) を元に運動方程式を考えると，ループ量子重力理論の効果が反摩擦項として効き，インフレーションシナリオを変える可能性がある．この事情を説明しよう．

6.3.1 インフレーションで用いられる物理量

第 2 章で述べたインフレーションが起こることで Hubble 地平面のスケール r_{H}，物質が相互作用できるスケールが急激に大きくなり，これにより地平面問題が解決される．インフレーション期の量子揺らぎを元にして密度ゆらぎが生成され，共動的な波数 k を持つ波の波長 $a(t)\frac{2\pi}{k}$ はインフレーション開始時には r_{H} より速く大きくなり，この揺らぎは凍結される．インフレーションが終わるとやがては再び Hubble 地平面の中に入ってくる（図 6.6）．

宇宙マイクロ波背景放射との対応を考える際には一様等方性からの線形摂動を議論することが重要になる．摂動を含めた線素は

$$ds^2 = -(1+2A^{(p)})dt^2 + 2a(B^{(p)}_{|a} - S^{(p)}_a)dtdx^a$$
$$+ a^2\left\{(1+2\psi^{(p)})q_{ab} + 2E^{(p)}_{|ab} + 2F^{(p)}_{a|b} + h^{(p)}_{ab}\right\}dx^a dx^b \quad (6.46)$$

と書くことができる[21]．ここの上付き添字 $^{(p)}$ は摂動 (perturbation) を表すために付けたもので，時空や内部空間の添字とは関係ない．$A^{(p)}, B^{(p)}, \psi^{(p)}, E^{(p)}$ はスカラーの摂動量，$S^{(p)}_a, F^{(p)}_a$ はベクトルの摂動量，$h^{(p)}_{ab}$ はテンソルの摂動量である．また，ここでは $B^{(p)}$ などに対する 3 次元の共変微分を $B^{(p)}_{|a}$ のように略記した．摂動量の具体形は Einstein 方程式 (2.29) とそれに摂動を加え

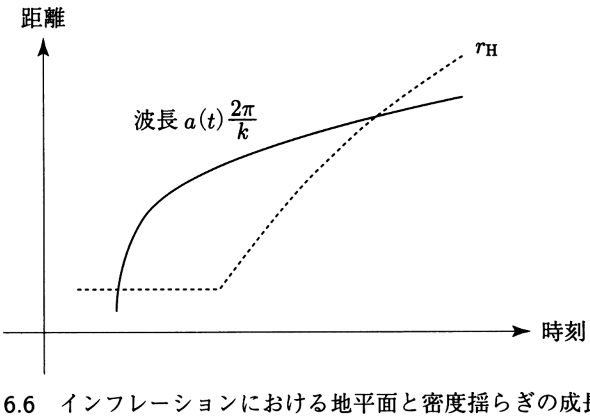


図 6.6　インフレーションにおける地平面と密度揺らぎの成長．

たもの

$$\delta R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\delta(g_{\alpha\beta}R) = 8\pi G\delta T_{\alpha\beta} \tag{6.47}$$

を同時に解くことで得られる．ただし，これらの方程式系はゲージ変換の自由度があるため，観測と結び付くゲージ不変量を調べることが重要である．そのような量として，スカラー摂動に関しては共動曲率ゆらぎと呼ばれる

$$\mathcal{R} := \psi^{(p)} - \frac{H}{\dot{\phi}}\delta\phi \tag{6.48}$$

がある．これを共動的な波数 $\mathbf{k}$ の Fourier 空間で展開し，

$$\mathcal{R}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\mathcal{R}(t,\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{6.49}$$

と書く．ただし，

$$\mathcal{R}(t,\mathbf{k}) := u(t,\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + u^*(t,-\mathbf{k})a^\dagger(-\mathbf{k}) \tag{6.50}$$

のように生成演算子 $a^\dagger(\mathbf{k})$ と消滅演算子 $a(\mathbf{k})$ を用いて表す．これを用いてスカラーパワースペクトル P_s は $k := |\mathbf{k}|$ として

$$P_s := \frac{k^3}{2\pi^2}|u(0,k)| \tag{6.51}$$

で定義され，WMAP などとの比較の上で最も重要な量の一つになっている．ここで現在の時刻を $t=0$ と置いた．スローロールパラメーター ϵ, η を

$$\epsilon := -\frac{\dot{H}}{H^2}\ , \quad \eta := -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \tag{6.52}$$

で定義すると，スローロールによるインフレーションの場合は P_s をこれらによって表すことができる．簡単のため，以下ではスカラー場の伝播速度 $c_s = 1$ のモデルのみ扱う．スカラーパワースペクトル P_s を共動的な波数 k を用いて

$$P_s \propto k^{n_s - 1} \tag{6.53}$$

と表したときの**スペクトル指数** n_s は

$$n_s = 1 + 2\eta - 6\epsilon \tag{6.54}$$

と表すことができる．

インフレーションでつくられた揺らぎはほぼ $n_s = 1$ であることがわかっている．ただし，インフレーション終了期には Hubble パラメーター H は減少することと関係して n_s は 1 より少し小さくなり，1 からのランニング

$$\alpha := \frac{d\ln n_s}{d\ln k} \tag{6.55}$$

を見ることも重要である．テンソルパワースペクトル P_t も上と同様にゲージ

不変量を元に得ることができる．これは重力波と関係したスペクトルであり，宇宙マイクロ波背景放射の偏光モードの観測によって間接的に検出されたとの報告がなされており，近年大きな話題になっている[22]．

$$P_t \propto k^{n_t} \tag{6.56}$$

と表したときの指数 n_t は

$$n_t = -2\epsilon \tag{6.57}$$

と表すことができる．ベクトルについては非等方ストレスがないと成長しないことがわかっている．**テンソル・スカラー比** r は

$$r := \frac{P_t}{P_s} = -8n_t \tag{6.58}$$

と書くことができる．実際に観測される温度揺らぎは，その角度パワースペクトルを $C_{\tilde{l}}$ として

$$\left\langle \left| \frac{\Delta T}{T} \right|^2 \right\rangle =: \frac{1}{4\pi} \sum_{\tilde{l}} (2\tilde{l}+1) C_{\tilde{l}} \tag{6.59}$$

と表される*1)．水素原子形成期の地平面スケールよりも長い揺らぎであればインフレーション期の揺らぎをそのまま保っていると考えられ，そのような場合（$\tilde{l} \leq 20$ 程度）であれば $C_{\tilde{l}}$ と P_s は近似的に

$$\frac{\tilde{l}(\tilde{l}+1)C_{\tilde{l}}}{2\pi} \simeq \frac{P_s}{25} \tag{6.60}$$

と結び付けられる．以下ではループ量子重力理論に基づくインフレーションと観測との整合性を調べてゆく．

6.3.2 等面積離散化を用いた場合

(6.45) において $j \gg 1$ とした場合，近似的に

$$(a^{-3})_{\text{eff}} = a^{-3} D \tag{6.61}$$

$$D(q) := \Big[3q^{1-l}/(2l) \left\{ (l+2)^{-1} [(q+1)^{l+2} - |q-1|^{l+2}] - (l+1)^{-1} q [(q+1)^{l+1} - \text{sgn}(q-1)|q-1|^{l+1}] \right\} \Big]^{3/(2-2l)} \tag{6.62}$$

と書ける[51]．ただし，

$$q = \frac{a^2}{a_*^2}, \quad a_*^2 = \frac{8\pi\gamma G j}{3} \tag{6.63}$$

である．$q \gg 1$ の極限で $D(q) \to 1$ のため，$(a^{-3})_{\text{eff}} \to a^{-3}$ という古典論の場合に帰着する．逆に $q \ll 1$ であれば $D(q) \simeq q^{3(2-l)/(2-2l)}$ のため，

*1) 通常はこの $\tilde{l}$ を l と書いているが，ループ量子化の際に現れる l と区別するために記法を変えた．

$$(a^{-3})_{\rm eff} \simeq a^{3/(1-l)} \tag{6.64}$$

であり，古典論の場合と全く異なる振る舞いをすることがわかる．このため，(6.44) から得られるインフレーションシナリオも通常とは異なってくる．$q \ll 1$ のケースにおいて気を付けなければいけないのが，**a そのものが Planck スケールの場合，有効方程式 (6.44) を使うことが正当化されない点**である．従って，ここでは $a^2 \gg \sqrt{G}$ という条件は暗黙の前提である．

簡単のため，[62] に従い $l = 3/4$ と置くと，

$$D(q) = \left[2q^{1/4}\left\{\frac{4}{11}[(q+1)^{11/4} - |q-1|^{11/4}] - \frac{4}{7}q[(q+1)^{7/4} - {\rm sgn}(q-1)|q-1|^{7/4}]\right\}\right]^6 . \tag{6.65}$$

この式の導出は付録 B で行う．簡単のため，空間的に平坦な FRW (5.1) の場合を考えると

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{\dot{\phi}^2}{2D} + V(\phi)\right], \tag{6.66}$$

$$\ddot{\phi} + \left(3H - \frac{\dot{D}}{D}\right)\dot{\phi} + D\frac{dV}{d\phi} = 0 \tag{6.67}$$

が得られる．$q \gg 1$ であれば (6.67) 第 2 項の $\frac{\dot{D}}{D}$ は無視できるため，第 2 項が摩擦項として効くが，$q \ll 1$ であれば $D \propto a^{15}$ のため，第 2 項の $\dot{\phi}$ の係数は $-12\frac{\dot{a}}{a}$ であり，反摩擦項として効く．そのため，図 6.7 のようにスカラー場がポテンシャルを登ってゆくという現象が起きる．もちろん，そのまま登ってゆくだけではなく，a が大きくなると共に $D(q) \to 1$ と振る舞い，やがてはポテンシャルを下ることになる．また，(6.66) と (6.67) から

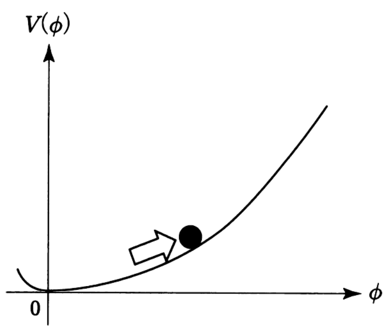


図 6.7 ループ量子重力理論で考えられる補正のため，ポテンシャルを登るスカラー場．

$$\dot{H} = -4\pi G \frac{\dot{\phi}^2}{D}\left(1 - \frac{\dot{D}}{6HD}\right) \tag{6.68}$$

が得られる．通常の一般相対性理論では $D = 1$ であるから $\dot{H} < 0$ であるが，この場合，$q \ll 1$ であれば $\dot{H} > 0$ となる．これは**スーパーインフレーション**と呼ばれる．スカラー場のポテンシャル項 $V(\phi)$ がなくてもインフレーションが起こることを意味し，文献 [63] では $V(\phi)$ なしで 2.3 節で述べた e-folding が 60 以上の条件を満たし，平坦性などの問題を解決できるか検討された．解決のためには，スーパーインフレーションが終わった時点で $p_\phi \simeq 10^{30}\sqrt{G}$ という不自然な値が要求された．ループ量子重力理論の効果を取り入れてもやはり $V(\phi)$ は必要であり，次に $V(\phi)$ の選び方と関連して様々な議論がなされた．

カオティックインフレーションのモデル

2004 年 Tsujikawa らは m_ϕ をスカラー場の質量として

$$V(\phi) = \frac{m_\phi^2}{2}\phi^2 \tag{6.69}$$

と選んだ場合を考えた．これは 1983 年，Linde によって提案されたモデルで，通常カオティックインフレーションのモデルと呼ばれる[64]．Planck スケールでの量子ゆらぎにより，スカラー場が Planck 質量 $1/\sqrt{G}$ より大きな値を取っている可能性を考えたものだが，ここでは最初のスーパーインフレーションにより，そうした大きな値に達し，$\phi_{\max}$ からポテンシャルを下って通常のスローロールインフレーションを起こすシナリオが考えられる[65]．

e-folding の条件を満たすには $\phi_{\max}$ が $3/\sqrt{G}$ 程度以上必要なことがわかっており，そのためには $j \geq 100$ であることが要請される．ポテンシャルを登ることと関係して $\dot{\phi} = 0$ 付近ではスローロール近似を用いた (6.54) が使えないが，この場合は

$$P_s \simeq \frac{9H^6}{m_\phi^4 \phi^2} \tag{6.70}$$

を用いて評価できる[66]．文献 [65] が出た当時は $k \sim 10^{-3}\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ のスケールでのランニング (6.55) が

$$\alpha = -0.077^{+0.050}_{-0.052} \tag{6.71}$$

というデータが WMAP により得られていた．(6.69) でスローロール近似 (6.54) を用いた場合には $\alpha \simeq -0.005$ 程度である．ループ量子重力理論の効果を取り入れ，ポテンシャルの山を登ってゆくときに (6.70) を用い，通常のスローロールへ移行するというシナリオを考えた場合には $\alpha \simeq -0.06$ 程度という (6.71) に近い結果が得られた．図 6.8 は文献 [65] による宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎ（実線）と WMAP1 年目のデータ（黒点）の関係を示したもので

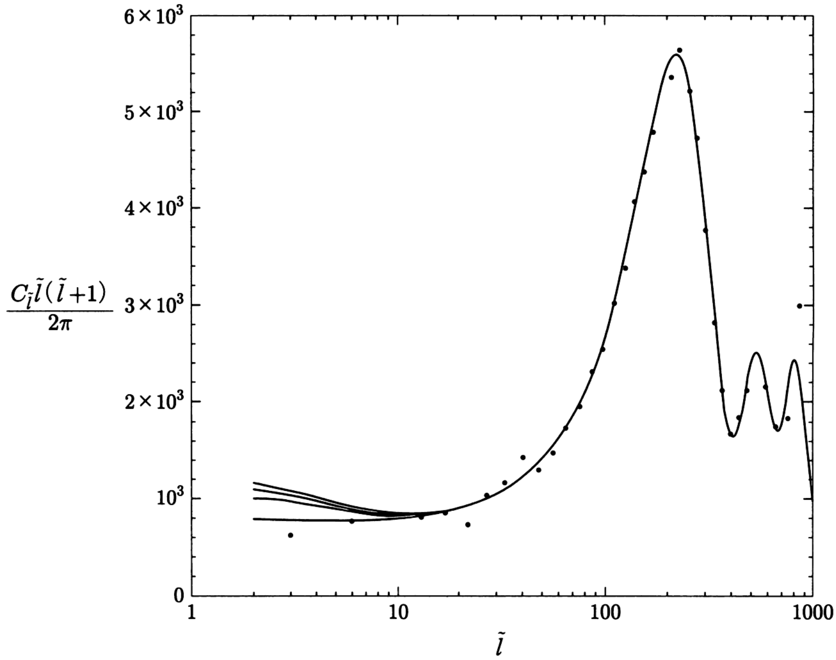


図 6.8 宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎ（文献 [65] より）.

ある．実線の一番上が通常のカオティックインフレーションのモデルで，下 3 つはループ量子宇宙論の効果を取り入れ，パラメーターを変えたものである．$\tilde{l} \sim 10$ が $k \sim 10^{-3}\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ に対応している．

この結果などをきっかけに，これまでループ量子重力理論には携わってこなかった宇宙論の分野の研究者からも興味を持たれることになり，多数の関連論文が現れた．

スケーリング解のモデル

2006 年 Mulryne らはポテンシャルの形を

$$V(\phi) = V_0|\phi|^{\beta}\ , \quad \beta > 0\ , \quad V_0 < 0 \tag{6.72}$$

と仮定した[67]．この場合，$q \ll 1$ の下で

$$a = C_1(-\tau)^p\ , \quad \phi = C_2(-\tau)^{np/2} \tag{6.73}$$

という形の解を持つ．ただし，C_1, C_2 は定数，$n = 3(2-l)/(1-l)$, $p = -4/(n\beta+4)$ である．また，$ad\tau := dt$ であり，膨張宇宙では τ は負の値から 0 に値が増加することは仮定している．この解は力学的エネルギーとポテンシャルエネルギーの比が一定という性質を持ち，これをスケーリング解と呼ぶ．

Mulryne らはこの解を元にスカラー場の摂動を行い，得られるスカラー場のスペクトルは $\beta \gg 1$ であればスケール不変であることを示した．ただし，計量の摂動は無視していた．地平面スケールが

$$\frac{1}{H} \to \frac{\sqrt{D}}{H} \tag{6.74}$$

に変化することが議論された点は興味深い．

重力場の Hamiltonian 拘束条件の補正

しかし，本来は物質場だけでなく重力場の Hamiltonian 拘束条件も修正する必要がある．第 5 章では $j = 1/2$ としていたが，(6.45) と同様に一般の j にし，付録 B の手法で補正を取り入れた重力場の有効 Hamiltonian 拘束条件 $C_{\mathrm{grav(eff)}}$ は

$$C_{\mathrm{grav(eff)}} = -\frac{3}{8\pi\gamma G} a S(q) \dot{a}^2 \ , \tag{6.75}$$

ただし，

$$S(q) = \frac{4}{\sqrt{q}} \left[\frac{(q+1)^{5/2} + \mathrm{sgn}(q-1)|q-1|^{5/2}}{10} - \frac{(q+1)^{7/2} - |q-1|^{7/2}}{35} \right] \tag{6.76}$$

である[68]．この場合，(6.67) の表式は変わらないが，(6.66) は

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} S \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2D} + V(\phi) \right] \tag{6.77}$$

と修正される．この結果が発表されたのが 2005 年，等体積離散化が考えられたのが 2006 年ということもあって，この間に発表されたループ量子宇宙論に基づくインフレーションモデルは丁度，過渡期にあったと言える．実際，上の Mulryne らは [68] を引用しているにもかかわらず，(6.76) の補正は考えていない．

ここでは次の節と関連する文献のみ取り上げたが，多くの論文が出ており，この時期までの上記以外の主な文献を以下の表 6.1 にまとめる．△ は重力場の Hamiltonian 拘束条件に対し，(6.38) と同じ補正を行ったことを示す．

6.3.3 等体積離散化を用いた場合

等体積離散化の場合も本質は同じであるが，この場合は

$$q := \left(\frac{a}{a_*}\right)^3 ,$$
$$a_* := \left(\frac{2j}{K}\right)^{1/3} \sqrt{\frac{8\pi\gamma G}{6}} \tag{6.78}$$

に再定義した上で

表 6.1　等面積離散化を用いたループ量子宇宙論.

V の形など	$S(q)$	文献
(6.69) の V で j などの不定性と e-folding を満たす初期条件を考察	×	[69]
$V_{\min}(0)=0$ と $\frac{d^2V}{d\phi^2}(\phi \neq 0)>0$ のみ指定 閉じた FRW で膨張と収縮を繰り返す宇宙を議論	×	[70]
V は指定せず，パワースペクトル一般の議論．計量の摂動はなし	×	[71]
V は指定せず，スーパーインフレーションの一般性を議論	×	[72]
閉じた FRW での新たな静的解とその下でのインフレーション $V=\alpha[\exp(\beta\phi/\sqrt{3})-1]^2$	×	[73]
V は指定せず，p_ϕ/ρ_ϕ 比を議論	×	[74]
V は指定せず，(6.73) のスケーリング解を議論	×	[75]
自己双対 Plebanski 作用を元にすると，補正の形が変化	×	[76]
$V=0$ でバウンスの議論	△	[77]
幾つかの V でブレーンシナリオとの対応を議論	×	[78]
V は非最小結合 $-\sigma\phi^2R$ と (6.69), $\frac{\lambda}{4}\phi^4$	△	[79]
V は指定せず，パワースペクトル一般の議論．計量の摂動はなし Hubble 地平面の変化 (6.74) は考慮	△	[80]

$$
\begin{aligned}
D(q) &= \left[\frac{27|q|^{(3-2l)/3}}{8l}\left\{\frac{(q+1)^{2(l+3)/3}-|q-1|^{2(l+3)/3}}{l+3}\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.-\frac{2q[(q+1)^{2(l+3)/3}-\mathrm{sgn}(q-1)|q-1|^{2(l+3)/3}]}{2l+3}\right\}\right]^{3/(2-2l)},\\
S(q) &= \frac{1}{4}\left[2\left\{(q+1)^3-|q-1|^3\right\}\right.\\
&\qquad \left.-3q\left\{(q+1)^2-\mathrm{sgn}(q-1)|q-1|^2\right\}\right] \qquad (6.79)
\end{aligned}
$$

と変更される[81]．$q \gg 1$ であれば $D(q), S(q) \to 1$ は変わらないが，$q \ll 1$ であれば

$$
D(q) \to \left(\frac{9}{2l+3}\right)^{3/(2-2l)} q^{(3-l)/(1-l)}, \qquad (6.80)
$$

$$
S(q) \to \frac{3}{2}q^3 \qquad (6.81)
$$

のように等面積離散化の場合とは振る舞いが異なる．ループ量子宇宙論の文献を読むときには**文献 [56], [81] を引用しているかどうか**に注意してもらいたい．同じように D, S という記号を使っていても意味が異なる場合があるためである．

2008 年 Mulryne らを含むグループは，この等体積離散化の場合の D, S で前節 6.3.2 のスケーリング解の再解析を行った[82]．(6.73) に出てくる n は $n=3(3-l)/(1-l)$，p は $p=-4/[10+(n-3)\beta]$ と変更される．$\beta \gg 1$ で

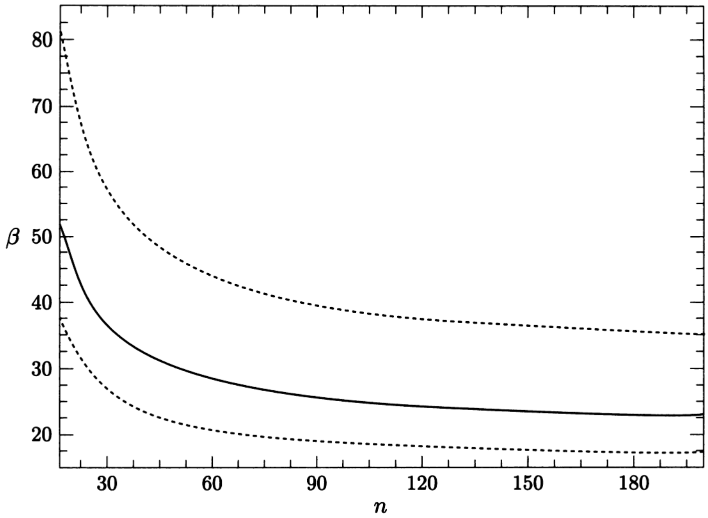


図 6.9　n-β の許容範囲（文献 [83] より）．

あればスカラー摂動に基づくスペクトルがスケール不変という基本的な性質は変わらない．また，動力学的な系とみなしたときに，スケーリング解が安定な固定点であることが示された．ただし，理論的にも観測的にもスケール不変からのずれが示唆されていることから，本来は β に制限を付けたいところである．また，Hubble 地平面の変化 (6.74) が等体積離散化の場合にどのようになるのかも考察すべきである．

2009 年 Shimano らは，地平面スケールは

$$\frac{1}{H} \to \frac{\sqrt{SD}}{H} \tag{6.82}$$

に変更されるべきことを示し，スカラー場のスペクトルから β の制限を考えた[83]．この当時得られていた WMAP のデータ

$$n_s = 0.963^{+0.014}_{-0.015} \tag{6.83}$$

から β と n の許容される範囲を描いたのが図 6.9 である．実線が最適な値，破線が境界値を表す．

6.3.4　ループ量子宇宙論におけるゲージ不変摂動論の進展

2009 年頃までのループ量子宇宙論においては，パワースペクトルはスカラー場の摂動もしくは一般相対性理論の場合の評価式に基づいて考えられていた．そこで計量の線形摂動から導かれる式にも補正を入れることが重要であるが，量子化する前にゲージ固定することで整合性が失われてしまう可能性がある．そうしたゲージ固定からくる人為性を取り払った上でベクトル[84]，テンソル[85]，スカラー[86]それぞれについて評価がなされた．こうしたゲージ固定を考慮し，代数が閉じる形で拘束条件が解けるのは現在のところ量子論的な補正が小さい

$q > 1$ の場合である．従って上述のスーパーインフレーションの時期は適用範囲外である．この補正の程度 $\delta_{\rm pl}$ の主要項は (5.50) の v を用いて

$$\delta_{\rm pl} \simeq \left(\frac{G^{3/2}}{v}\right)^{4/3} \tag{6.84}$$

と表せる．ここではより一般的にスケールファクター a との関係を，パラメーター σ を導入して

$$\delta_{\rm pl} \propto a^{-\sigma} \tag{6.85}$$

と書く．ただし，$\sigma \geq 0$ は仮定する．ここでは S, D の 1 からのずれは小さく，$\delta_{\rm pl}$ を用いて

$$S = 1 + S_0\delta_{\rm pl}\ ,\quad D = 1 + D_0\delta_{\rm pl} \tag{6.86}$$

と表す．S_0, D_0 は定数である．これらを用いてスローロールパラメーター ϵ は

$$\epsilon \simeq \frac{4\pi G\dot{\phi}^2}{H^2}\left[1 + \left\{S_0 + D_0\left(\frac{\sigma}{6} - 1\right)\right\}\delta_{\rm pl}\right] + \frac{\sigma S_0 \delta_{\rm pl}}{2} \tag{6.87}$$

という補正を受けることになる．(6.52) と比較するには (6.68) で $D = 1$ としたものを (6.52) に代入すればよい．パワースペクトルは [87] で求められ，スカラー P_s，テンソル P_t それぞれの場合について

$$P_s = \frac{GH^2}{\pi\epsilon}(1 + \gamma_s\delta_{\rm pl}), \tag{6.88}$$

$$\gamma_s := D_0\left(\frac{\sigma}{6} + 1\right) + \frac{\sigma S_0}{2\epsilon} - \frac{\chi}{\sigma + 1},$$

$$\chi := \frac{\sigma D_0}{3}\left(\frac{\sigma}{6} + 1\right) + \frac{S_0}{2}\left(5 - \frac{\sigma}{3}\right),$$

$$P_t = \frac{16GH^2}{\pi}(1 + \gamma_t\delta_{\rm pl})\ ,\quad \gamma_t := \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}S_0 \tag{6.89}$$

と書き表すことができる．これらに伴い，

$$\begin{aligned} n_s - 1 &= 2\eta - 6\epsilon + \sigma\gamma_{n_s}\delta_{\rm pl}, \\ \gamma_{n_s} &= S_0 - 2D_0 + \frac{\chi}{\sigma + 1}, \\ r &= -8\left[n_t + \{n_t(\gamma_t - \gamma_s) + \sigma\gamma_t\}\delta_{\rm pl}\right] \end{aligned} \tag{6.90}$$

と変更される．2011 年 Bojowald らは，スローロールを出発点としたインフレーションの仮定の下，(6.69) などのポテンシャルでスペクトルの解析を行った[88]．得られた結果は大スケールでのパワーがループ量子宇宙論の効果によって大きくなるというもので，これは以前（図 6.8）とは逆の結果である．最初の仮定そのものが違っているためである．

最近ではさらに高次の摂動を含む場合の系統的な取り扱いも議論され始めている[89]．現在のところ $q \ll 1$ の領域について確かなことは言えないが，逆に言うと面白い部分の研究が残されているということであり，意欲的な研究者にとってはチャンスである．

第 7 章
特異点回避周辺

一様等方宇宙の場合の特異点回避の議論は，Bianchi I のような一様宇宙モデルには比較的容易に拡張することができる．Kantowski–Sachs 宇宙モデルとして記述できる Schwarzschild ブラックホールの場合には何点かの非自明な点を残すものの拡張可能である．古典論では特異点と思われていた“点”は別の宇宙に繋がっている可能性も指摘されている．ただし，Reissner–Nordström ブラックホール中心などの古典論で時間的特異点に相当する“点”がループ量子重力理論でどのように変化するのかは一般的には議論できない．また，量子重力的効果で重力崩壊によってブラックホールができるしきい値が変化する可能性，特異点の性質が変化する可能性もある．

7.1 一様時空の場合

一様時空は次式で定義される構造定数 ${C^I}_{JK}$ によって Bianchi タイプ I から IX までに分類される．

$$ {C^I}_{JK} := \left(\frac{\partial e^I_a}{\partial x^b} - \frac{\partial e^I_b}{\partial x^a} \right) e^a_J e^b_K \ . \tag{7.1} $$

この分類の際には，C^I_{JK} を

$$ {C^I}_{JK} = M^{IL} \epsilon_{LJK} + \delta^I_{[J} B_{K]} \ , \quad M^{IJ} B_J = 0 \tag{7.2} $$

と分解し，行列 M^{IL} を対角化したときの対角成分 M_1, M_2, M_3 と，ベクトル B_J を特定の向きに取って $(B, 0, 0)$ のように選んだときの値 B が用いられる．これらは大半の場合はその符号だけが問題であり，規格化することにすると，表 7.1 のようにまとめられる[19]．このうちさらに $B = 0$ の場合はクラス A，$B \neq 0$ の場合はクラス B と呼ばれる．

一様時空でも一般には計量の対角化ができず，このために体積作用素の固有値を求めるのは困難である[90]．しかし，真空解であればクラス A の場合とクラ

表 7.1 一様な時空の分類．

タイプ	B	M_1	M_2	M_3	特徴
I	0	0	0	0	Kasner 解．平坦な解を含む．
II	0	1	0	0	
VI	0	1	−1	0	
VII	0	1	1	0	
VIII	0	1	1	−1	
IX	0	1	1	1	一定の正曲率空間を含む．
IV	1	0	0	1	
V	1	0	0	0	一定の負曲率空間を含む．
VII	B	0	1	1	
III($B=1$), VI($B\neq 1$)	B	0	1	−1	

ス B の Bianchi V の場合は対角化可能であり[91]，これらの場合には体積作用素の固有値が比較的容易に求められることもあって，すぐに議論された[92]．体積作用素の固有状態は

$$|n_1, n_2, n_3\rangle := |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle \tag{7.3}$$

である．ただし，

$$\langle c_I | n_I \rangle = \frac{\exp(i n_I c_I/2)}{\sqrt{2}\sin(c_I/2)} \tag{7.4}$$

を満たす．c_I は第 5 章の c の拡張にあたる量である．ただし，ここでは λ にあたるパラメーターは 1 と置いている．このとき

$$\hat{V}|n_1, n_2, n_3\rangle := (4\pi\gamma G)^{3/2}\sqrt{|n_1 n_2 n_3|}|n_1, n_2, n_3\rangle\ . \tag{7.5}$$

ここまでは計量が対角化できるモデルであれば共通だが，Hamiltonian 拘束条件の解析が容易なのは Γ^I_a が消える Bianchi I の場合である．この場合には

$$\mathrm{S}_I = \sin\left(\frac{c_I}{2}\right), \quad \mathrm{C}_I = \cos\left(\frac{c_I}{2}\right) \tag{7.6}$$

を導入することで (5.36) に対応した

$$\hat{C}_{\text{grav}} = \frac{4i}{\pi\gamma^3 G^2}\Big[\mathrm{S}_1\mathrm{C}_1\mathrm{S}_2\mathrm{C}_2\left(\mathrm{S}_3\hat{V}\mathrm{C}_3 - \mathrm{C}_3\hat{V}\mathrm{S}_3\right)$$
$$+\mathrm{S}_3\mathrm{C}_3\mathrm{S}_1\mathrm{C}_1\left(\mathrm{S}_2\hat{V}\mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_2\hat{V}\mathrm{S}_2\right) + \mathrm{S}_2\mathrm{C}_2\mathrm{S}_3\mathrm{C}_3\left(\mathrm{S}_1\hat{V}\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_1\hat{V}\mathrm{S}_1\right)\Big]$$

が得られる．後は例えば n_3 を内部時間と解釈すれば一様等方宇宙の場合と同様に解析できる．他の Bianchi タイプの研究については文献 [93] などを参照されたい．

7.2 Schwarzschild ブラックホールの場合

空間的超曲面を選んでその時間発展を追う，という現在のループ量子重力理論の定式化では，一般的には古典論の時間的特異点や光的特異点の解消を議論することはできない．空間的特異点であっても自由度の多いシステムでは議論は困難であるが，球対称性まで課した Schwarzschild ブラックホールであれば議論することができる．これがブラックホールで特異点回避が議論された数少ない例である[94]．また，古典論で特異点に対応する“点”から別の宇宙に繋がっており，それと同時にブラックホール情報喪失の問題を解決できる可能性を秘めていて興味深い[95],[96]．

Schwarzschild ブラックホールの空間計量は (2.44) より

$$d\hat{s}^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 =: h_r dr^2 + h_\Omega d\Omega^2 \tag{7.7}$$

と書ける．このとき三脚場密度は (4.43) から

$$|E^r| = h_\Omega, \quad E^\phi = \sqrt{h_r h_\Omega} \tag{7.8}$$

と書け，量子論ではこれらが演算子になる．地平面内部では時間と空間の役割が入れ替わっているので，内部時間に相当するものは E^r である．Hamiltonian 拘束条件は次の格子モデルを元にした基底

$$|\vec{k}, \vec{\mu}\rangle := \prod_{l_n} \exp\left(\frac{ik_n}{2}\int_{l_n}(A_r + \beta)dr\right)\prod_{v_n}\exp(i\mu_n A_\phi) \tag{7.9}$$

に作用する．l_n, v_n はそれぞれリンク，ノードを表すラベルである．β はスカラー量であり，$k_{n+1} - k_n$ は偶数という制限が付く．リンク上の k_n は $\hat{E}^r$ の整数固有値であり，ノード上の μ_n は $\hat{E}^\phi$ の正の実数固有値である．

この基底は模式的に

$$|\vec{k}, \vec{\mu}\rangle = \overset{\cdots}{\underset{\cdots}{—}}\bullet\overset{k_n}{—}\underset{\mu_n}{\bullet}\overset{k_{n+1}}{—}\bullet\overset{\cdots}{\underset{\cdots}{—}} \tag{7.10}$$

と表すことができ，Hamiltonian 拘束条件が作用することにより

$$\begin{aligned}\hat{C}_{\rm grav}[N]\overset{k_n}{—}\bullet\overset{k_{n+1}}{—} = \sum_\nu N(\nu)\big[\hat{C}_0(k)\overset{k_n}{—}\bullet\overset{k_{n+1}}{—}\\ +\hat{C}_{R+}(k)\overset{k_n}{—}\bullet\overset{k_{n+1}+2}{—} + \hat{C}_{R-}(k)\overset{k_n}{—}\bullet\overset{k_{n+1}-2}{—}\\ +\hat{C}_{L+}(k)\overset{k_n+2}{—}\bullet\overset{k_{n+1}}{—} + \hat{C}_{L-}(k)\overset{k_n-2}{—}\bullet\overset{k_{n+1}}{—}\big]\end{aligned} \tag{7.11}$$

のように変化する．N はラプス関数であり，ノード v の関数である．$\hat{C}_I(k)$ は $\hat{C}_I(k) = C_I(k)\hat{C}_I$ のように，k の関数 $C_I(k)$ とノードのみに作用する作用素 $\hat{C}_I$ の積で表せる．一般的な状態を $|\Psi\rangle = \sum \Psi(\vec{k}, \vec{\mu})|\vec{k}, \vec{\mu}\rangle$ と表すと $\hat{C}_{\rm grav}|\Psi\rangle = 0$ から得られる差分方程式は各ノードごとに定まり

$$\hat{C}_0(k)\Psi(\vec{k}_n,\vec{k}_{n+1})+\hat{C}_{R+}(k)\Psi(\vec{k}_n,\vec{k}_{n+1}-2)+\hat{C}_{R-}(k)\Psi(\vec{k}_n,\vec{k}_{n+1}+2)$$
$$+\hat{C}_{L+}(k)\Psi(\vec{k}_n-2,\vec{k}_{n+1})+\hat{C}_{L-}(k)\Psi(\vec{k}_n+2,\vec{k}_{n+1})=0 \qquad (7.12)$$

である．ただし，ノード μ_n を表すラベルは省略してある．各ノードごとに 1 つの方程式を持つという点が一様等方宇宙の場合との決定的な違いである．また，これと関係して Ψ は k_n, k_{n+1} という 2 つの整数によって指定される．後の議論は一様等方モデルと似ているが，隣のノードを指定する $\Psi(\vec{k}_{n-1},\vec{k}_n)$ に関する式と連立させて解く必要がある．その結果，演算子順序によっては特異点回避が可能であるが，どのように時空構造が延長されるのか現段階ではわからない．また，実際には Hamiltonian 拘束条件によって新たなリンクやノードが増える可能性もあり，このような議論はまだなされていない．物質場があっても余分な項が付け加わるだけなので，古典論の時空構造が同じ GM–GHS 解[26] などの物質場入りブラックホールの場合にも拡張できる可能性がある．

別の宇宙に繋がっており，それと同時にブラックホール情報喪失の問題を解決できる可能性も議論されており，注目に値する[95],[96]．図 7.1 の左側は，古典論において重力崩壊によって形成された Schwarzschild ブラックホールの Penrose 図である．これが特異点回避のシナリオに従うと右側のように変更される可能性がある．灰色の領域が古典論で記述できない領域を示し，それを囲む線は地平面である．ブラックホール蒸発が進むとホワイトホールが形成され，どんどん情報を外側の領域に吐き出してくれることを意図して描いている．特定の温度でものを吐き出すブラックホール蒸発と違い，ホワイトホールでは吐き出すものに情報が含まれているというのがポイントである．論文を読んでも実際にこういうことを示したわけではないようであるが，今後の研究の方向性として面白い．また，これは超弦理論における **fuzzball シナリオ**とは対照的である[97]．このシナリオによれば，Hawking 輻射からは実際は情報が漏れ出ているはずである．しかし，こちらも Schwarzschild ブラックホールに対して成り立つことは示されておらず，今後の発展が待たれる部分である．ループ量子重力理論と超弦理論の結果の比較ができるようになると非常に面白い．

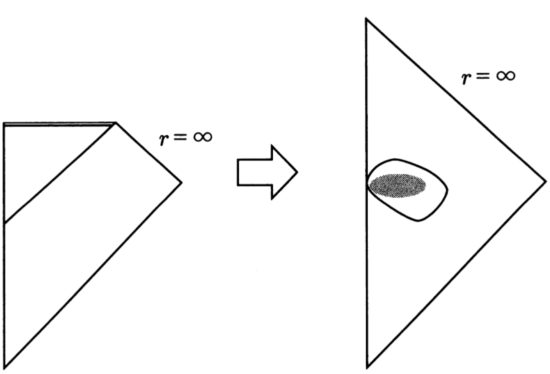


図 7.1　特異点回避シナリオの可能性．

7.3 ブラックホール形成シナリオへの影響

宇宙初期の密度揺らぎを元に**原初ブラックホール**と呼ばれるブラックホールができた可能性があり，重力崩壊からできるブラックホールに比べると非常に軽く，地平面半径も小さいと考えられる．従って形成の仕方そのものが量子論によって影響を受ける可能性がある．

ここでは簡単のため，質量を持たないスカラー場 $\phi(t)$ の重力崩壊の様子を調べる[98]．簡単のため，内部は

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a(t)^2}{(1+r^2/4)^2}(dr^2 + r^2 d\Omega^2) \tag{7.13}$$

で記述し，外部の非定常な球対称時空を表す一般化された Vaidya 時空

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2GM(v,\chi)}{\chi}\right] dv^2 + 2dvd\chi + \chi^2 d\Omega^2 \tag{7.14}$$

との接続を考えることにする．

まずは古典論で議論する．Klein–Gordon 方程式 $a\ddot{\phi} + 3\dot{a}\dot{\phi} = 0$ から

$$\dot{\phi} = \frac{L}{a^3} \tag{7.15}$$

という形の解が得られ，L は崩壊領域の長さのスケールを表す．一方，Einstein 方程式から

$$H^2 = \frac{4\pi G}{3}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{a^2} \tag{7.16}$$

が得られる．これは a には最大のサイズ a_{m} があることを意味し，

$$a \leq a_{\mathrm{m}} = \frac{4\pi}{3}G^{1/4}\sqrt{L} \tag{7.17}$$

である．古典論では $a \to 0$ の特異点が存在し，(7.15) から $\dot{\phi}$ も発散している．

しかし，6 章で見たように $a(t)$ の振る舞いはループ量子重力理論の効果によって変化する．内部の基礎方程式は

$$H^2 = \frac{4\pi G}{3D}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{a^2} \tag{7.18}$$

及び (6.67) において $\frac{dV}{d\phi} = 0$ と置いたものである．接続面 $r = R$ での外部計量 (7.14) との接続条件は

$$\chi = \frac{Ra}{1+R^2/4}, \tag{7.19}$$

$$\dot{v} = \frac{1+R^2/4}{1-R^2/4-R\dot{a}}, \tag{7.20}$$

$$2GM = \frac{aR^3(\dot{a}^2+1)}{(1+R^2/4)^3}, \tag{7.21}$$

$$-GM_{,v} = \chi_{,vv} + \left(1 - \frac{2GM}{\chi} - 3\chi_{,v}\right)\left(\frac{GM}{\chi} - GM_{,\chi}\right) \tag{7.22}$$

である．外部領域が捕捉面 (trapped surface) を持つのは $2GM = \chi$ が満たされたときであるが，これを接続面の条件を用いて書き表すと，(7.19), (7.21) より

$$|\dot{a}| = \frac{1 - R^2/4}{R} \tag{7.23}$$

である．図 7.2 は a-$|\dot{a}|$ の関係を示したもので，破線が古典論における振る舞い，実線がループ量子重力理論の効果を取り入れたものである．古典論の場合は $|\dot{a}|$ が 0 から ∞ の任意の値を取りうるため，捕捉面は必ず生じる．図 7.2 の点線 3 本は，R が異なる 3 つの場合の (7.23) が満たされる箇所を示している．ループ量子重力理論では捕捉面が生じない場合があるばかりか，生じた場合の構造そのものが古典論と異なることを示している．(7.23) から $R \to 0$ の場合に右辺が発散するが，ループ量子重力理論では $|\dot{a}|$ に上限があるため，(7.23) は満たされない．これは，量子論の効果によって非常に小さなブラックホールはできなくなることを意味する．単純化したモデルではあるが，宇宙初期の原初ブラックホール形成シナリオなどに影響を及ぼす可能性がある．また，この結果は等面積離散化の場合であるが，等体積離散化及び重力場の Hamiltonian 拘束条件に対して (6.79) の $S(q)$ の補正を入れても本質は変わらないと予想される．

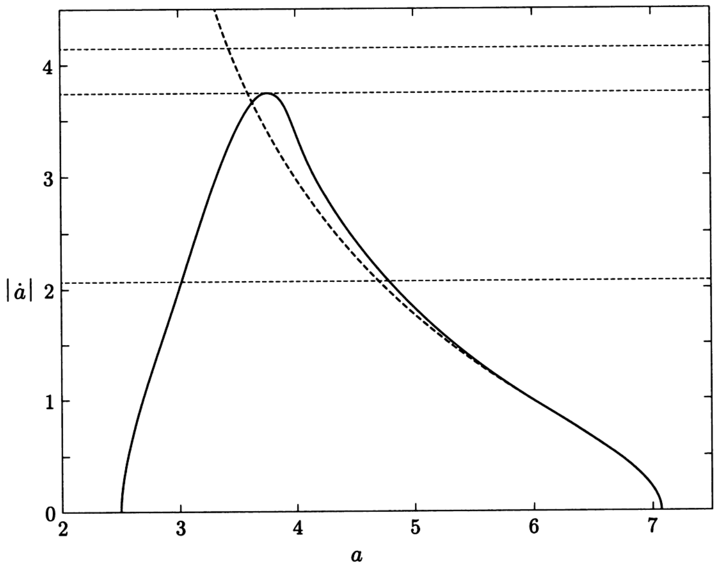


図 7.2 a-$|\dot{a}|$ の関係（文献 [98] より）．

7.4 Lemaitre–Tolman–Bondi 時空の場合

球対称ダストの重力崩壊の記述は Lemaitre–Tolman–Bondi (LTB) モデル

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R'^2}{1+\kappa(r)}dr^2 + R^2 d\Omega^2 \tag{7.24}$$

によって扱うことができる．ただし，$' = d/dr$ である．このモデルにおいてループ量子重力理論の効果を取り入れた場合，前節と類似した結果になるか否かには興味がある[99]．中心 $R = 0$ 付近の様子を調べることが一つの焦点である．(7.8) と同様に $\sqrt{|E^r|}$ が動径座標 R に対応している．一様等方モデルの a^{-1} の書き換え (6.45) と同様の操作をすることで $1/\sqrt{|E^r|}$ とその固有値 $\alpha(E^r)/\sqrt{|E^r|}$ の違いが生じ，$\alpha(E^r)$ は

$$\alpha(E^r) = 2\sqrt{|E^r|}\frac{\sqrt{|E^r+\gamma G/2|}-\sqrt{|E^r-\gamma G/2|}}{\gamma G} \tag{7.25}$$

のように書ける．ただし，ここでは簡単のため，スピン $j = 1/2$ としており，λ に対応するパラメーターも入っていない．これが 6.3 節の D と同じ役割を果たす．Planck 長 $\sqrt{G} \to 0$ の古典論の極限を取ることで $\alpha \to 1$ が得られる．実際には α の補正を入れることで方程式の整合性に問題が生じ，新たな補正項を入れるなど，Hamiltonian 拘束条件も幾つかのヴァージョンが考えられている．

古典論では中心に密度が集中し，強い特異点 (shell-focusing singularity) ができるのに対し，補正を考えた場合には中心には密度が集中しにくくなる．このために密度分布は半径 $\sqrt{\gamma G}$ 程度の部分に集中し，弱い特異点 (shell-crossing singularity) が生じる．この弱い特異点は，現実的な物質場を考えた場合には解消されることが期待される．

直感的な理解は前節と本節では共通してできる．中心付近はループ量子重力理論の効果によって物質が集中しにくくなり，密度が低くなる (図 7.3)．前節ではそのために半径が小さい (即ち質量の小さい) ブラックホールはできなくなっていた．同じ効果がここでは中心の特異点形成を妨げている，と理解で

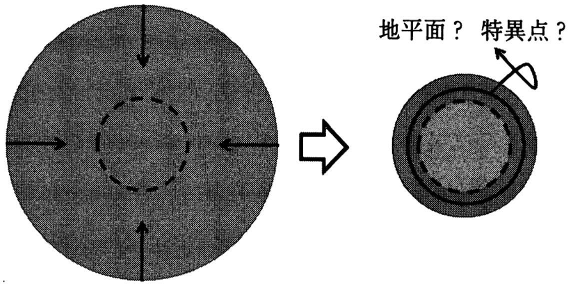


図 7.3　重力崩壊における密度の集中．濃淡は密度の高低に対応している．

きる．

7.5 一般的な場合

前節までの特異点回避はどこまで一般化できるだろうか？ 一様等方モデルでは a^{-1}，前節では三脚場の逆べきの固有値を正則化していることがポイントになっていた．時空モデルを固定しない場合には，三脚場の逆べきの固有値は正則化を施しても発散してしまうことが示されている[100]．

ただし，拘束条件を解いて，解として発散する場合があるのかどうかは話が別である．この問題を考えるには，拘束条件を体積作用素を用いて書き換えることと関係し，体積固有値が得られるかどうかが一つの鍵となる．第 4 章で述べたように，体積固有値を計算する方法は，文献 [50] によってコンピューターに載せやすい形にまとめられている．数値計算によって一般的な特異点回避が調べられる可能性も出てきている．

第 8 章
ブラックホールエントロピー

ここではブラックホール熱力学を孤立地平面の定義を用いて拡張する．この定義に基づき，地平面とその外部の境界条件をループ量子重力理論を用いて表し，今度はその状態数を計算する．地平面面積 A とエントロピー S の間に成り立つ一般相対性理論の公式は $S=\frac{A}{4G}$ である．状態数から得られるエントロピーは，BI パラメーター γ を調整することでこの公式を満たすことができる．

8.1 ABCK formalism：古典論

第 2 章ではブラックホールに熱力学と類似した法則が成り立つことを見た．熱力学が統計力学によって原理的に説明されたように，ブラックホール熱力学も量子重力理論を用いて統計力学的に説明されるのではないかと考えたくなる．

この可能性を追求する前に，ブラックホール熱力学と通常の熱力学の類似性を振り返ってみたい．熱力学において典型的に考察されるのは孤立系である．ブラックホール熱力学が成立する状況は孤立系のようなものと考えられるだろうか？ 通常，ブラックホールは事象の地平面をその境界として持つものと定義される．事象の地平面とは，定義では光的無限遠の過去の境界である．従って，時空構造が定まった後で定義されるものであるが，熱力学における孤立系は決してそのようなものではない．例えば，図 8.1 のように質量 M の星が重力崩壊を起こす状況を考えてみよう[101],[102]．Δ_1 は臨界捕捉面 (marginally trapped surface) の集合によって定義される光的面で，星が重力崩壊して以後外部から何も加えなければ事象の地平面となっていたはずの面であり，Δ_1 とその内部は孤立系と言ってよいと思われる．ところが非常に長時間たった後で質量殻 δM が降ってきて，この後質量降着などが起きないとしたら Δ_2 が事象の地平面となり，Δ_1 はそうではなくなってしまう．同様にして，充分時間が経てば Δ_2 とその内部は孤立系と言ってもよさそうだが，無限時間経たなければ事象の地平面であることは保証されない．このように，事象の地平面は孤立系としての

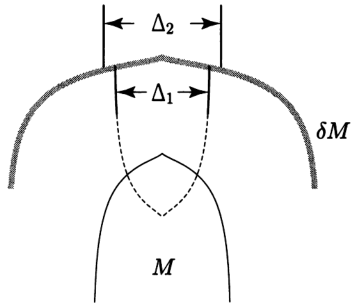


図 8.1　重力崩壊を起こした質量 M の星に質量殻 δM が降る様子.

ブラックホールを表すには強すぎる概念である.

それでは**見かけの地平面** (apparent horizon) を用いてはどうだろうか？ 見かけの地平面は捕捉領域の境界にあたるので，図 8.1 だけで判断すれば，孤立系としてふさわしいように思われる．しかし，見かけの地平面に出入りする物質場があってもよく，場合によっては平衡系，孤立系を表しているとは言い難い．これらの点に注目し，熱力学との類似性を記述するのに都合のよい地平面，**孤立地平面** (isolated horizon) を定義したのが Ashtekar 達である．一言で言えば，見かけの地平面に加え，地平面に出入りする物質場や重力波がない，という条件を加えたものとみなすことができる．この定式化を用い，量子論的に状態数の考察を行ったものは，その著者 4 人の頭文字を取ってしばしば **ABCK formalism** と呼ばれる[103],[104].

上記の条件だけでなく，ブラックホール熱力学が成立するための条件を考えなければならないのが難しい点である[101],[102]．定常なブラックホールであれば Killing 場 χ^μ を用いて表面重力 κ は

$$\nabla^\mu(\chi^\nu\chi_\nu) = -2\kappa\chi^\mu \tag{8.1}$$

と書けるが，Killing 場の代わりに局所的なベクトル場で代用できるかどうかがポイントである.

単位ベクトル r_I を用いて，地平面での接続は

$$W_a := -\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma^I_a r_I \tag{8.2}$$

のように U(1) に限定される．これに関する曲率 F_{ab} を用いて，孤立地平面とその外部との接続条件は

$$\boxed{F_{ab} = -\frac{2\pi\gamma}{A}\Sigma^I_{ab} r_I} \tag{8.3}$$

と表すことができる．ただし，Σ^I_{ab} は 2-form で E^a_I とは

$$E_I^a = \gamma\epsilon^{abc}\Sigma_I^{bc} \tag{8.4}$$

の関係にある．境界条件 (8.3) のため，一般相対性理論の作用に表面項として Chern–Simons 作用に比例する項

$$\frac{1}{8\pi G}\frac{A}{4\pi\gamma}\int_A d^3x\epsilon_{abc}\left[A_a^I\partial_b A_c^I + \frac{1}{6}\epsilon^{IJK}A_a^I A_b^J A_c^K\right] \tag{8.5}$$

を付け加える必要がある．

8.2 ABCK formalism：量子論

量子論の記述は孤立地平面の外側 (bulk) ではスピンネットワークを用いる．Hilbert 空間を孤立地平面 (IH) のもの H_{IH} と bulk のもの H_Σ のテンソル積 $H_{\mathrm{IH}} \otimes H_\Sigma$ に分ける．スピン $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ を持つリンクと IH の交点を指定すれば，H_Σ は次の直和の形で表せる．

$$H_\Sigma = \bigoplus_{j_i, m_i} H_\Sigma^{j_i, m_i} \ . \tag{8.6}$$

基本的に IH と交点のないリンクは考慮しないという方針である．ただし，m_i は $-j_i$，$-j_i+1$，$\cdots$，j_i の値を取りうる．これは IH に直交するフラックス (4.30) を演算子化したものの固有値 $e_{s'}^{m_i}$ と次のように関係する（s' は IH の一部であり，スピン j_i を持つリンクと 1 点のみで交わる）．

$$e_{s'}^{m_i} = 8\pi\gamma G m_i \ . \tag{8.7}$$

(8.6) のような分解を考える理由は，(8.3) の右辺を演算子化したものの固有値は (8.4) によってフラックス固有値で表せるためである．通常の IH の枠組みでは IH に接するようなリンクは考えないので $m_i \neq 0$ であり，これと関係して面積スペクトラムも単純な (4.59) になる．

bulk の拘束条件について考えると，Gauss 拘束条件は自動的に満たされているし，運動量拘束条件は，IH のどこにリンクが突き刺さるのかを問う必要がないことを意味している．Hamiltonian 拘束条件は非自明ではあるが，(j, m) は IH に非常に近い位置でのリンクに関するものということで，bulk 上の Hamiltonian 拘束条件は (j, m) に影響しないものと仮定する．また，事象の地平面の外側と異なり，特定のブラックホール時空を表すわけではないので特にスピンネットワークに条件は設けない．

IH の拘束条件についてはラプス関数が消えるということで Hamiltonian 拘束条件は考えない．IH が微分同相写像と U(1) ゲージ変換について不変である，と要請することで，地平面面積 A は

$$A = 4\pi\gamma G k \tag{8.8}$$

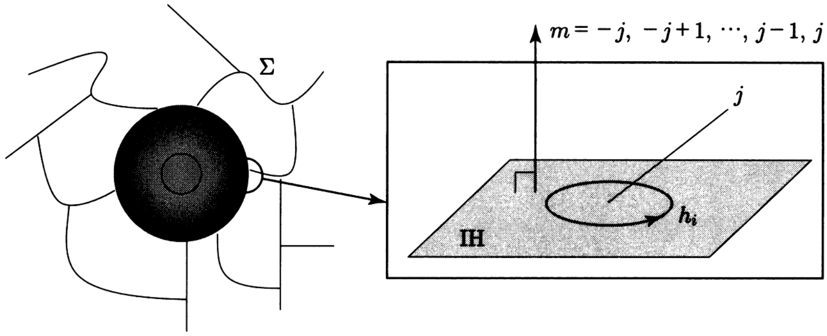


図 8.2　IH に刺さるスピンネットワーク.

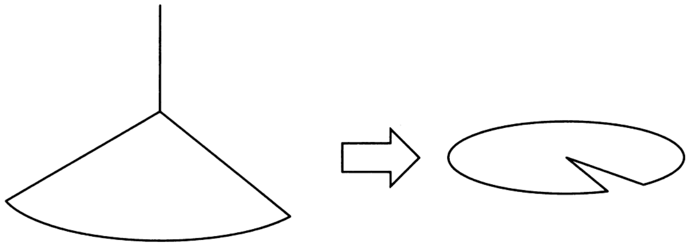


図 8.3　スピンネットワークによる欠損角.

と固定される. k は自然数であり, Chern–Simons 理論のレベルと呼ばれる. この条件に加え, $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ の順序は固定しなければならない. IH の Hilbert 空間はホロノミー作用素 $\hat{h}_i$ の固有状態 Ψ_b

$$\hat{h}_i \Psi_b = e^{\frac{2\pi i b_i}{k}} \Psi_b \tag{8.9}$$

を用いて, (8.6) に類似した直和の形で書くことができる（図 8.2).

面積固有値 A_j は

$$\text{(i)}\quad A_j = 8\pi\gamma G \sum_{i=1}^{n} \sqrt{j_i(j_i+1)} \leq A \tag{8.10}$$

を満たす必要がある.

次に考えるべき条件としては何があるだろうか？ IH にスピンネットワークが刺さることにより欠損角が生じ, これは b_i と関係している（図 8.3). この欠損角は任意に選べるわけではなく, IH が S^2 であることを保証する量子的 Gauss–Bonnet の定理があり, これによって

$$\text{(ii)}\quad \sum_{i=1}^{n} b_i = 0 \quad \mathrm{mod}\ k \tag{8.11}$$

が要請される．

IH と bulk の間の境界条件 (8.3) を素直に量子化したものは，

$$(1\otimes\hat{F})\Psi=\left(-\frac{2\pi\gamma}{A}\hat{\Sigma}\otimes 1\right)\Psi \tag{8.12}$$

であるが，これも実接続からホロノミーに書き換えたのと同じ事情で正則化する必要があり，実際は

$$\left(1\otimes\exp(i\hat{F})\right)\Psi=\left(\exp\left(-i\frac{2\pi\gamma}{A}\hat{\Sigma}\right)\otimes 1\right)\Psi \tag{8.13}$$

を考える．これにより

$$\text{(iii)}\quad b_i=-2m_i \mod k \tag{8.14}$$

を得る．これら 3 つの条件を考えてゆけばよい．

8.3 状態数の計算

(ii) と (iii) を用いると，n' を整数として

$$\text{(ii)}'\quad \sum_{i=1}^{n}m_i=n'\frac{k}{2} \tag{8.15}$$

を得る．ただし，IH が Planck スケールに比べて充分大きければ，この条件は状態数に影響を与えないことがわかっている[105]．結局は (i) に関わる自由度だけを数えればよい．自由度の考え方として主に 2 つある．

1. 表面の自由度 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(-2m_1,-2m_2,\cdots,-2m_n)$ を数える方法[104], [105]．
2. j と b，両方の自由度を数える方法[106]~[108]．

エントロピーは地平面の自由度だけで書けるのだから，表面の自由度 b のみを数えるべきとする立場もあれば，当の地平面の構成には j も関わっているため，j と b の両方の自由度を数えるべきとする立場もあり得る．ここではまず後者の可能性を考えることにする．問題を簡単にするため，次の集合 M_k を考える[105]．

$$M_k:=\left\{(j_1,\cdots,j_n,m_1,\cdots,m_n)\;\middle|\;0\neq j_i\in\frac{Z}{2},\ \sum_i j_i\leq\frac{k}{2},\right.$$
$$\left.-j_i\leq m_i\leq j_i,\ m_i\neq 0\right\}. \tag{8.16}$$

即ち，(4.53) を簡略化した $A = 8\pi G\gamma \sum j$ と (8.8) を用いて A を消去し，その場合の数を考えることに相当する．N_k を M_k の要素の数に 1 を加えたものとする．以下では集合に含まれる $(m_1, \cdots, m_n)$ を省略して書く．

まず最初に気付くべきこととして，$(j_1, \cdots, j_n) \in M_{k-1}$ であれば，$(j_1, \cdots, j_n, \frac{1}{2}) \in M_k$ が成立することが挙げられる．同様にして自然数 s, $(0 < s \leq k)$ に対して，

$$(j_1, \cdots, j_n) \in M_{k-s} \Rightarrow \left(j_1, \cdots, j_n, \frac{s}{2}\right) \in M_k \tag{8.17}$$

が言える．さらに，$s \neq s'$ ならば

$$\left(j_1, \cdots, j_n, \frac{s}{2}\right) \neq \left(j_1, \cdots, j_n, \frac{s'}{2}\right) \in M_k \tag{8.18}$$

である．そしてこれが肝心な点であるが，**M_k の構成要素をつくるにはこのような M_{k-s} からつくっていくしかない．** これと (8.18) から，このような自然数 s の全てと，全ての系列 $(j_1, \cdots, j_n) \in M_{k-s}$ を網羅することで，$(j_1, \cdots, j_n, \frac{s}{2})$ が集合 M_k をなすことがわかる（図 8.4）．

次に M_{k-s} に $j_{n+1} = \frac{s}{2}$ を加えて M_k の要素をつくるときの自由度の変化を考える．例えば M_{k-1} に $j_{n+1} = \frac{1}{2}$ を加えるのであれば，$m_{n+1} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ の 2 通りが考えられるので，M_{k-1} の 2 倍の要素が M_k の要素として加えられることになる．M_{k-2} に $j_{n+1} = 1$ を加え，M_k の要素をつくるのであれば，$m_{n+1} = -1, 0, 1$ の 3 通りなので，M_{k-1} の 3 倍の要素が M_k の要素として加えられると考えたくなるが，ここで $m_i \neq 0$（あるいは $b_i \neq 0$）という条件を満たす必要があることを思い出す必要がある．従って，j_i が整数であれば，各 j_i は $2j_i$ の自由度を持つし，j_i が半整数であれば，各 j_i は $2j_i + 1$ の自由度を持つ．$[\cdots]$ というのを整数部分を意味することにすれば，これらは $2[\frac{2j+1}{2}]$ とまとめることができる．従来は j_i によらず $2j_i + 1$ の自由度と考えていたが[106]~[108]，$m_i \neq 0$ を考えると上記の自由度になるというのは筆者達が最初に指摘した点である[109]．従って帰納的に，

$$N_k = \sum_{s=1} 2 \left[\frac{s+1}{2}\right] (N_{k-s} - 1) + 1 \tag{8.19}$$

という関係が得られる．

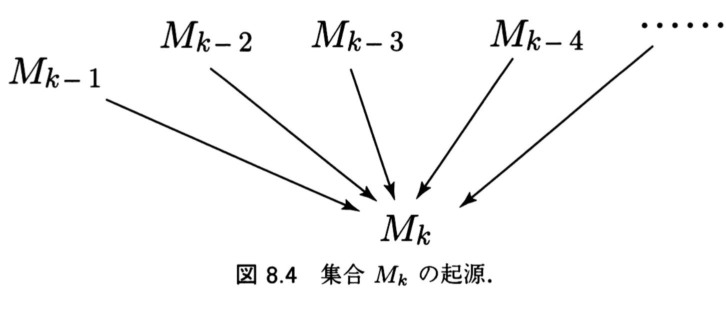


図 8.4 集合 M_k の起源．

この関係式の直接の拡張として，実際の面積公式 (4.53) を扱うために次を満たす集合の要素の数 $N(a)$ を考える必要がある．

$$N(a) := \left| \left\{ (j_1, \cdots, j_n) \,\middle|\, 0 \neq j_i \in \frac{Z}{2}, \right.\right.$$
$$\left.\left. \sum_i \sqrt{j_i(j_i+1)} \leq \frac{k}{2} = a := \frac{A}{8\pi\gamma G} \right\} \right|. \tag{8.20}$$

この場合の帰納関係式は

$$N(a) = 2N(a - \sqrt{3}/2) + 2N(a - \sqrt{2}) + \cdots +$$
$$2\left[\frac{2j+1}{2}\right] N(a - \sqrt{j_i(j_i+1)}) + \cdots + [\sqrt{4a^2+1} - 1] \tag{8.21}$$

である．$\sqrt{j_i(j_i+1)} = a$ の解が $j_i = (\sqrt{4a^2+1} - 1)/2$ であることに注意すれば，$[\sqrt{4a^2+1} - 1]$ の意味は明らかである．

次の関係式[105]

$$N(a) = C \exp\left(\frac{A\gamma_M}{4\gamma G}\right) \tag{8.22}$$

$(C, \gamma_M$ は定数) を (8.21) に代入し，$A \to \infty$ の極限を取ると，

$$1 = \sum_{j=Z/2} 2\left[\frac{2j+1}{2}\right] \exp(-2\pi\gamma_M \sqrt{j(j+1)}) \tag{8.23}$$

を得る．$A \to \infty$ と言っても Planck スケールに比べて遥かに大きいという意味に解釈すべきである．$S = \frac{A}{4G}$ を要請すれば $\gamma = \gamma_M$ であり，$\gamma = 0.26196\cdots$ を得る*1)．

このように，面積が Planck スケールに比べて非常に大きければ，その自由度は指数関数的に増えてゆく．しかし，Planck スケールに近い場合であれば単純ではない．地平面面積と状態数の関係をプロットしたものが図 8.5 である[110]．ただし，$m=0$ も含めている．また，横軸の面積は $4\pi\gamma G$ で規格化してある．バンド状の構造が周期的に現れているのがわかる．この構造は m のみの自由度を数える場合でも同じであることがわかっている．ブラックホール蒸発の最終段階などと絡めて議論できれば面白い．

次に，表面の自由度を数える最初の可能性を考える．これは例え $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ が異なっても，地平面面積と $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ が同じであれば，自由度としては同

*1) 上では $[A - \delta A, A + \delta A]$ という微小区間を考えているわけではないが，(8.22) から，$A \to \infty$ では $\ln\left(\frac{dN}{dA}\delta A\right) \to \ln N$ と書けるため，最終結果には影響しない．

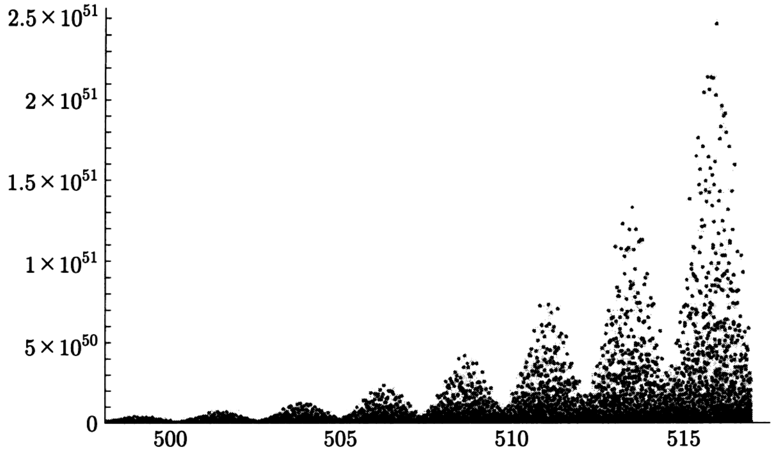


図 8.5 地平面面積と状態数の関係（文献 [110] より）.

じものであるとみなす立場である．例えば，$(j_1, j_2) = (3/2, 1/2)$ と $(1/2, 3/2)$ は共に $(b_1, b_2) = (-1, -1)$ である可能性があり，そうであるならばこれらは区別しないという立場である．

この自由度をうまく数える方法が文献 [105] で提唱されている．まず (8.10) を

$$\text{(i)}' \quad 8\pi\gamma G \sum_i \sqrt{|m_i|(|m_i| + 1)} \leq A \tag{8.24}$$

のように書き換える．これが満たされるのは $m_i = \pm j$ のときである．次に，(8.17) と次式を比較してみる．

$$(m_1, \cdots, m_n) \in M_{k-s} \Rightarrow (m_1, \cdots, m_n, \pm\frac{s}{2}) \in M_k \ . \tag{8.25}$$

一見するとこれらは $m_{n+1} = -\frac{s}{2}+1, \cdots, \frac{s}{2}-1$ の自由度を捨ててしまったように思えるが，そうではない．この場合にはそれらの自由度は M_{k-s+2}, M_{k-s+4}, $\cdots$ から得られることに注意しなければならない．(8.17) と同様にしては重複する自由度を数えてしまうことに相当する．

例えば (8.25) では M_{k-s} に $|m_{n+1}| = j_{n+1} = \frac{s}{2}$ を足して M_k を得ることに相当する．この場合の $m_{n+1} = \pm\frac{s-2}{2}$ という自由度も考えたとしよう．これと M_{k-s+2} に $j_{n+1} = \frac{s-2}{2}$ を足して M_k を得るときの $m_{n+1} = \pm\frac{s-2}{2}$ は独立な自由度にはならない．$|m_{n+1}| < \frac{s-2}{2}$ の場合も同様である．従って形式的には $m_i = \pm j$ という場合だけを考えればよいことになる．

このようにして帰納的に

$$N_k = \sum_{s=1} 2(N_{k-s} - 1) + 1 \tag{8.26}$$

を得る．この場合には $\gamma_M = 0.23753\cdots$ である．

8.4 面積固有値による違いと近年の進展

上で紹介した面積固有値以外も IH として許容される可能性はある．例えば，ここでは IH を時空の境界面として扱っているため，一般化された面積公式 (4.61) において $j_i^d = 0, j_i^u = j_i^t := j_i$ とした

$$A = 4\pi\gamma G \sum_i \sqrt{j_i(j_i+1)}$$

を使うべきという意見もある．IH の内部にあたる j_i^d は考えないという立場である．この場合，j と b の両方の自由度を数えると，(8.23) は少し変更され，

$$1 = \sum_{j=Z/2} [\frac{2j+1}{2}] \exp(-2\pi\gamma_M \sqrt{j(j+1)}) \ ,$$

$\gamma = \gamma_M = 0.367\cdots$ である．b の自由度のみの場合は

$$1 = \sum_{j=Z/2} \exp(-2\pi\gamma_M \sqrt{j(j+1)}) \ ,$$

$\gamma = \gamma_M = 0.323\cdots$ である[111]．

筆者らはこの結果を一般的な面積固有値 (4.61) を使った場合にも拡張した．動機の一つとしては，ABCK formalism では IH と bulk をわけようとして IH にリンクが乗っておらず，$j_i^t = 0$ としたり，上のように IH を時空の境界面と考えて $j_i^d = 0$ としている点が人為的だと考えた点が挙げられる．また，一般的な面積固有値のように j_i^u, j_i^t, j_i^d の自由度（独立ではないが）があった場合でも，本当に面積に比例する結果が得られるのかという数学的な興味もあった．結果としては面積に比例し，その場合は上記のそれぞれの場合に対応して $\gamma = \gamma_M = 0.928\cdots$，$0.727\cdots$ である[112]．

BI パラメーター γ を調節すれば，どの場合でも $S = \frac{A}{4G}$ を再現することができるため，これだけでは説得力に欠ける．一つの方向性として補正項の形を調べるというものがある．一般的な面積固有値 (4.61) の場合はまだ調べられていないが，単純化された面積固有値 (4.59) の場合は，j と m 両方の自由度を数える場合でも m のみの自由度を数える場合でも

$$S \simeq \frac{A}{4G} - \frac{1}{2} \ln A$$

のように ln の補正項があることがわかっている．一方，超弦理論の立場では

$$S \simeq \frac{A}{4G} - \frac{3}{2} \ln A$$

であり，ln の補正項があることまでは共通であるが一致しない[113]．

この点に関して近年進展が報告されている[114]．元来，ABCK formalism は古典論の段階でヌル四脚場 (null tetrad) を用いていたが，接続を用いて考えた場合には，超弦理論のアプローチと補正項が一致する．Chern–Simons 作用に

比例する項の形が (8.5) から

$$\frac{1}{8\pi G}\frac{A}{4\pi\gamma(1-\gamma^2)}\int_A d^3x\epsilon_{abc}\left[A_a^I\partial_b A_c^I+\frac{1}{6}\epsilon^{IJK}A_a^I A_b^J A_c^K\right] \tag{8.27}$$

に変更される点が効いている．もちろん，古典論の段階では違いはないのだが，量子論では違いが現れる．さらにこの Chern–Simons 作用に比例する項の不定性を利用すれば，BI パラメーターの値に依らずに $S=\frac{A}{4G}$ を再現できると議論されている．それならば Hamiltonian 拘束条件を単純化できる $\gamma=i$ の Ashtekar 変数で考えようという動きもあり，議論は進行中である[115]．

8.5 考察

ループ量子重力理論におけるブラックホールエントロピーの統計力学的説明は次のようにまとめることができる．

♣ IH の境界条件を量子化し，基本的には面積固有値に関わるスピンネットワークの自由度を数える．

この章の説明を読むと色々と疑問が生じることと予想される．疑問にも幾つか異なる階層があるが，根本的な疑問には次のようなものがあるだろう．

1. なぜ重力子に関する自由度ではないのか？
2. 通常の統計力学ではエネルギーと関係させて自由度を数えるが，なぜそうしないのか？

最初の疑問について Ashtekar 達は「重力場が定常の場合を扱っているため，重力子の自由度でないことがわかる」と一言で片付けている[101]．しかし，筆者にはこれが十分な理由とは思えない．また，2 番目の疑問は 1 番目の疑問とも関連しているが，元々の一般相対性理論で局所的なエネルギーを定義する困難もあって仕方がない面もある．しかし，最初から考察対象から外すべきかどうかは別問題であり，やはり疑問は残る．

これらの根本的な疑問はさておき，ループ量子重力理論の枠組みを用いることは前提としても ♣ に関する疑問としては次のようなものが挙げられる．

1. なぜ IH 内部の自由度を数えないのか？
2. IH ではなく，他の地平面の定義を用いるとどうなるのか？

最初から地平面の自由度を数えているため，面積に比例するのは当たり前ではないか，というのは自然な意見である．これに対する Ashtekar らの意見は，IH 内部が他の宇宙と繋がっている可能性，繋がっていない可能性を挙げて，こう

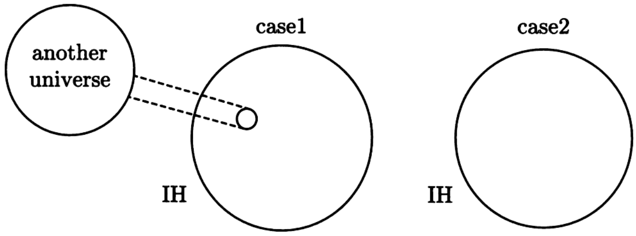


図 8.6　IH 内部が他の宇宙と繋がっている場合 (case1), 繋がっていない場合 (case2).

いう違いが状態数に影響を与えるのは不合理であり，内部は考察すべきでない，としている（図 8.6）．実際，前章で紹介したように，Schwarzschild ブラックホールでは，古典論で特異点とされていた領域から他の宇宙と繋がっている可能性はある．Ashtekar らの意見に一理はあるかもしれないが，IH 内部の自由度を数えると言っても様々な困難が考えられ，このように説明する他はないのだろう．例えば，体積固有値と関連させるにしても一般的な場合の体積固有値を求めること自体非常に困難であるし，仮に求められたとしたら地平面面積ではなく，体積に比例することが予想される．

また，他の地平面の定義を用いるとどうなるのかという疑問に対しては次のような答えが考えられる．IH の場合，面積が Planck サイズより遥かに大きければ，結局は面積固有値と関係した自由度だけが効いて，他の条件には影響されない．断言はできないが，他の地平面の定義でも状況は似ていると予想される．この事情は IH のトポロジーがドーナツのようになっていたり，それを拡張した複数個の穴があるケースでも同様である[116]．面積固有値しか効かないのであればブラックホールに限らずにエントロピーを持つことになるのではないか，という疑問も生じる．しかし他の条件を使わないのと効かないのとでは事情が異なる．他の条件に抵触した時点で後の議論はできないとするのが一つの立場だろう．

一旦 ♣ を認めてしまえば物質場を入れた場合，回転している場合はどうなのかというのが気になる．まず物質場を入れた場合，その表面自由度は重力の自由度のみで表せるということが Ashtekar らによって議論されている．回転している場合にも IH は拡張されており，面積固有値が変更を受けるわけでもないので本質は同じである[117]．この状況から，主にループ量子重力理論の研究者によって表 8.1 のような超弦理論とのブラックホールエントロピーに対するアプローチの比較表がまとめられ，しばしば目にすることになった．

Schwarzschild ブラックホールを含む幅広いクラスのブラックホールに適用できる反面，BI パラメーターを調節して $S = \frac{A}{4G}$ を導いているという曖昧さがあった．前節のように BI パラメーターではなく，Chern–Simons 作用に比例する項の不定性を利用するという議論もあるが，不定性があるという点は同じ

表 8.1　ブラックホールエントロピーの理解の仕方.

	超弦理論	ループ量子重力理論
考える自由度	D-brane の配位	スピンネットワークの配位
適用範囲	極限ブラックホール	任意
欠点	適用範囲が限られる	BI パラメーターを調節する必要

である．超弦理論では極限ブラックホールに対しては曖昧さなしに $S = \frac{A}{4G}$ を導くことができる反面，双対性を用いていることから適用可能なブラックホールは限定されていた．上の表はしばしば超弦理論と相補的であると言うために用いられた．しかし，現状では，ループ量子重力理論のアプローチは相補的と言うには本質的な問題を抱えすぎているように見える．上に挙げた疑問点があるのももちろんであるが，♣ を認めたとしても次のような問題点がある．

1. Hamiltonian 拘束条件を扱っていない．
2. 地平面の外に制限を設けていない．
3. 古典論を経由している．

この章の第 2 節では，IH 上ではラプス関数が消えるため Hamiltonian 拘束条件を考えないと書いたが，これは座標の取り方によるものであり，本当は Hamiltonian 拘束条件を扱わなくてよい，ということにはならない．また，地平面の外が任意であってよいはずはなく，地平面の存在からスピンネットワークに制限が付くはずである．さらに，最初から古典論を経由していることによって本来備わっているはずの自由度を落としている可能性があり，この辺の事情は宇宙論と同様である．ループ量子重力理論を宣伝する側からは，ブラックホールエントロピーの導出を，一つの大きな成功のように語ることが多いが，このように実際はまだ始まったばかりという見方が妥当である．現在でも様々な論文が出ている途中のフロンティア領域である[118]．

第 9 章 その他の重要な話題

この章では単独の章としてはまとめることができなかった幾つかの話題を紹介する．具体的には，宇宙項を伴う場合の全ての拘束条件を満たす Chern–Simons 解，変形量子化を用いたスピンネットワーク，ブラックホールエントロピーと関連して話題を呼んだ準固有振動と面積離散化の対応，量子的時空から古典的時空に発展する描像を考察した自己組織化仮説，宇宙線を用いた量子重力理論の効果の検証可能性である．

9.1 Ashtekar 接続における Chern–Simons 解

この節では Ashtekar 接続 $\gamma = i$ を考える．宇宙項を伴う場合の Hamiltonian 拘束条件は (4.42) から

$$C_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi G}\int_{\nu} d^3x \frac{N}{\sqrt{|E|}}\left[\epsilon^{IJK}F^I_{ab}E^a_J E^b_K + 2\Lambda E\right] \tag{9.1}$$

と書ける．

$$E = \frac{1}{3!}\epsilon^{IJK}\epsilon_{abc}E^a_I E^b_J E^c_K \tag{9.2}$$

及び $E^a_J \to -8\pi i G\frac{\delta}{\delta A^J_a}$ から，量子化したときには

$$\left[\epsilon^{IJK}\frac{\delta}{\delta A^J_a}\frac{\delta}{\delta A^K_b}F^I_{ab} - \frac{8\pi i G\Lambda}{3}\epsilon^{IJK}\epsilon_{abc}\frac{\delta}{\delta A^I_a}\frac{\delta}{\delta A^J_b}\frac{\delta}{\delta A^K_c}\right]\Psi = 0 \tag{9.3}$$

と表せる．ただし，第 4 章とは逆の演算子順序について考える．この場合には Wilson ループは解ではない．一方，次の Chern–Simons 解

$$\Psi_{\text{CS}} = \exp\left[\frac{-3i}{8\pi G\Lambda}\int d^3x\epsilon_{abc}\left(A^I_a\partial_b A^I_c + \frac{1}{6}\epsilon^{IJK}A^I_a A^J_b A^K_c\right)\right] \tag{9.4}$$

を持つ[119]．これは Hamiltonian 拘束条件だけでなく，全ての拘束条件を満たす．これを示すには

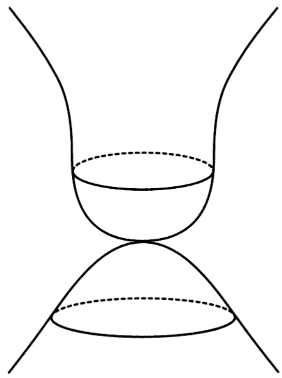


図 9.1　Chern–Simons 解による時空の創生．

$$\frac{\delta}{\delta A_a^I}\Psi_{\rm CS} = \frac{-3i}{16\pi G\Lambda}\epsilon_{abc}F_{bc}^I\Psi_{\rm CS} \tag{9.5}$$

を出発点として計算すればよい．このように，三脚場作用素の固有値が Ashtekar 接続からつくった磁場として表せることが特徴的である．従って，第 4 章で議論した計量演算子の固有値はこの磁場の積として表せる．Wilson ループと異なり，計量が縮退していない状態に対応している．時空の性質にあらかじめ一様等方性を課した場合には，Hartle と Hawking の波動関数の拡張に相当する．図 3.3 の S^4 の前に，古典論的には禁止されている空間計量の行列式が負の 4 次元双曲面 H^4 の領域が存在する（図 9.1）．これは非等方の場合にも拡張することができ，Euclid 的な時空のアンサンブルから宇宙が誕生したとする描像を提示する．また，この解は重要な結び目不変量である **Jones 多項式**（付録 A）とも関連し，宇宙の波動関数と結び目理論の関係という意味でも興味深い．

9.2　変形量子化とスピンネットワーク

通常のスピンネットワークは，重力理論が SU(2) ゲージ理論として書き直せることに基づいていた．Major と Smolin はこれを変形量子化した $\mathrm{SU}(2)_q$ の場合に拡張した[120]．$q = e^{i\pi/r}$, $r = k + 2$ であり，

$$k = \frac{6\pi}{G\Lambda} + s\ , \tag{9.6}$$

$s \in R$ である．宇宙項 $\Lambda \to 0$ の極限で $q \to 1$ であり，通常の SU(2) の場合に帰着する．このような拡張を行う理由は前節の Chern–Simons 解 (9.4) にある．Chern–Simons 解に Wilson ループをかけて積分した

$$\Psi(\alpha) = \int dAW(A,\alpha)\Psi_{\rm CS}(A) \tag{9.7}$$

を定義し，解の基底として用いようとするのは自然な発想だが，通常のループ α を用いた場合には発散が生じることが知られていた．これを取り除くため，

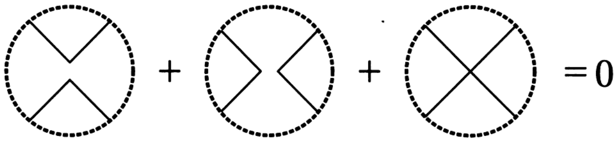


図 9.2　恒等式 (4.55) の表現.

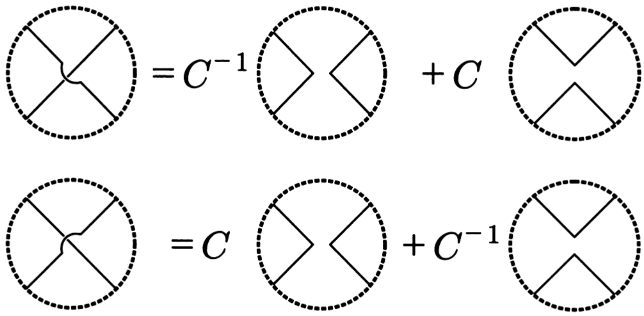


図 9.3　$\mathrm{SU}(2)_q$ の場合に成立する恒等式 I.

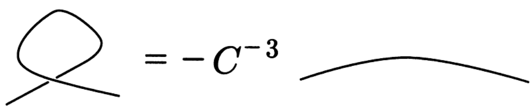


図 9.4　$\mathrm{SU}(2)_q$ の場合に成立する恒等式 II.

ループを拡張したフレームドループ (framed loop) というものを用いる必要があった．この段階で変形量子化 $\mathrm{SU}(2)_q$ を用いることになる．$\mathrm{SU}(2)_q$ の場合も図 4.9 に相当する関係式は成り立つが，ここではこれを図 9.2 のように表す．図 4.9 の交点付近に注目し，さらに全て符号がプラスで現れるようになっている．その上で 3 次元で上から交差したか下から交差したかを区別し，図 9.3 の関係式を要請する．C は $C^2 = q$ を満たす複素数である．$C = -1$ のときには全て図 9.2 に帰着する．

さらに図 9.4 のように 3 次元的に輪っかになっているものをほどいたときに $-C^3$ の寄与を与える．これらの条件のもとで $\mathrm{SU}(2)_q$ スピンネットワークを構成できる．

このスピンネットワークをもとにした面積固有値が得られており，

$$A = 8\pi G n\sqrt{\frac{1}{2}\left|\frac{[n+1]}{[n]} - \frac{1}{[2]}\right|}\,, \tag{9.8}$$

ただし，

$$[n] := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \tag{9.9}$$

であり，スピン $j = n/2$ である．$q \to 1$ では $[n] \to n$ なので，面積固有値 (4.59) が再現される．上記の結果は Ashtekar 接続を用いた場合であり，実接続を用いた場合は $G \to G\gamma$ に置き換えればよいと思われる．同様に体積固有

値も議論されている．

この結果は1995年のものであるが，この方向性の研究は一旦途絶えてしまっているように思われる．2008年のMajorの論文によれば当時は気づかれなかった数学的な困難があるようだが[121]，一旦定式化ができてしまえば宇宙論やブラックホールエントロピーなどは通常のスピンネットワークと並行した議論ができる可能性がある．どれだけ変形量子化の必要性があるかという疑問はあるものの，注目しておきたい方向性の一つである．

9.3 準固有振動と面積離散化の関連

一旦ループ量子重力理論を離れ，次の単純な考察から始める．面積の最小単位がPlanckスケールであり，それが等間隔で離散化されていると仮定すると，

$$A(n) = \sigma G n \ (\sigma : \text{未定定数},\ n = 1, 2, \ldots) \ . \tag{9.10}$$

統計力学との類推から地平面の状態数は $g_n = \exp(\frac{A(n)}{4G})$ と考えられる．g_n は n 番目の面積固有値の縮退度を表し，全ての n に対し，g_n が整数であって欲しいので[122]，

$$\sigma = 4 \ln k \ (k = 1, 2, \ldots) \ . \tag{9.11}$$

これに従えば $g_n = k^n$ である．地平面の大きさが0になってしまう $k = 1$ は合理的とは思えないので，次の $k = 2$ を考えると，Planckスケールの単位面積につき2つの自由度があることを意味する．最小単位に2つの自由度というのは，2進数を基本とするコンピューターを想起させる．Wheelerは"It from bit"（情報から存在へ）という描像を提示したが，まさにこの描像の通りである．それでは $k = 3$ やその他の可能性はないだろうか？ ブラックホール準固有振動を用いた面積量子化の方法を用いると，上記の $k = 3$ の結果が再現され，これはループ量子重力理論の結果とも関係する可能性があるので，ここで紹介する[123]．

ブラックホール時空の摂動を考えると，摂動方程式は時間依存性を $e^{-i\omega t}$ として次のSchrödinger型方程式に従う．

$$\frac{d^2\psi}{dr_*^2} + [\omega^2 - V(r)]\psi = 0 \ . \tag{9.12}$$

ここで r^* は亀座標で，地平面付近の様子を見るのに適す*1)．量子力学の井戸型ポテンシャル中の波動関数が，離散的な振動数の解を持つのと同様，ブラックホール時空の摂動は，離散的な固有の揺れのモードを持つ．これを

$$\omega(n) = \omega_{\rm R}(n) - i\omega_{\rm I}(n) \tag{9.13}$$

*1) 例えば，Schwarzschildブラックホールでは $dr = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dr^*$ の関係がある．

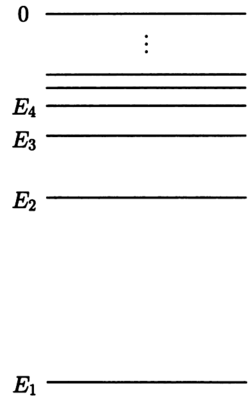


図 9.5 水素原子のエネルギー準位.

(n はモード数) のように書くと, $\omega_{\rm I}$ は近似的に n に比例し, $\omega_{\rm I}(\infty) \to \infty$ である. このため, ブラックホールが元の状態に戻る目安となる緩和時間 $\omega_{\rm I}^{-1}$ は同じ極限で 0 に近づく. 単純には, ブラックホールからより小さなエネルギーを取り出すのにかかる時間は, より短くてすむと思われるため, これを基に, **この極限での振動数 $\omega_{\rm R}$ から決まるエネルギーが, 取りうる質量変化 dM の最小値**, と予想する. Schwarzschild ブラックホールの場合, この極限で[124]

$$\omega(n) = T_{\rm BH} \ln 3 \left[1 - 2\pi i \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] . \tag{9.14}$$

一方, 第一法則から $dA = \frac{4G}{T_{\rm BH}} dM$ なので,

$$dA = 4G \ln 3 . \tag{9.15}$$

これは (9.11) の $k = 3$ に相当する. 全く異なる議論から一貫性のある結果が得られたため, 何か深い理由があると思いたくなる.

Hod は大胆にもこれを **Bohr の対応原理**と呼んだ. Bohr の対応原理は前期量子論において大きな役割を果たした原理である. 水素原子のエネルギー準位 E_n は図 9.5 のように離散的な値を取り, Rydberg 定数 R を用いて

$$E_n = -\frac{R}{n^2} \tag{9.16}$$

と表せる. n が充分大きいと連続準位に近づき, 電子は古典論の運動に近づく. 前期量子論では, これと「電子は特定の半径のときに定常な運動を続ける」というのを折衷的に組み合わせていた. 準固有振動の場合は (9.14) の n が充分大きいときが量子重力理論の結果と対応するだろう, というもので対応としては逆である. 物理的な議論はさておき, 現在を "前期量子重力理論" を構築中の時期だと思えば, このような対応原理のようなものが必要なのかもしれない.

これとループ量子重力理論の関連は次のように議論される. 得られるエントロピーは, この議論がなされた当時[103],

$$S = \frac{A \ln(2j_{\min}+1)}{8\pi\gamma G\sqrt{j_{\min}(j_{\min}+1)}} , \tag{9.17}$$

と得られていた．$j_{\min}$ は取りうるスピンの非自明な最小値を取る．この分母と (4.59) を比べると，スピンネットワークが地平面を貫くことによってできる面積要素の最小値 $A_{\min}$ が現れていることがわかる．当時は，地平面が Planck スケールに比べて充分大きいとき，最も細かく地平面を分割したものだけが状態数に効くと思われていたためであるが，前章で見たように数学的には間違いである．2004 年アイルランドで開かれた相対性理論の国際会議で，著者の一人 Baez は「すいません，間違えました」と言って謝っていた*2)．しかし，前章の結果も物理的には議論の余地を残しており，地平面を形成するのが $j_{\min}$ のみである可能性も排除はできないので，ここではこの仮定の下で議論を進める．自然には $j_{\min} = 1/2$ だが，Dreyer により次の提案がなされ，話題を呼んだ[125]．

準固有振動からの値 (9.15) と $A_{\min}$ を同一視し，

$$dA = 4G \ln 3 = A_{\min} \tag{9.18}$$

と置く．これと (9.17) の S が $\frac{A}{4G}$ に一致すべし，という要請をすると $j_{\min} = 1$ と定まる．γ と $j_{\min}$ の 2 変数代数方程式で，$j_{\min}$ が整数値というループ量子重力理論と整合性のある結果になったため，これを巡って議論が活発に行われた．ループ量子重力理論という枠組みでの提案に過ぎないエントロピーに，独立な物理的解釈が与えられる意義は大きいのである．

まず前章のように，一般的には $j_{\min}$ 以外もブラックホールエントロピーに寄与する可能性があり，整合性を含めどのように考えるべきかは重要である．準固有振動の計算は Schwarzschild ブラックホールという球対称なモデルで行われている．しかし，前章の計算では，例えば図 9.6 のような偏ったネットワーク分布をしているケースを除外していない．少なくとも粗視化したときは球対称性を反映すべきという条件を取り入れると[126]，(9.17) の表式が再現され，ただし，$j_{\min}$ については不定性が残る．この議論では，確かに準固有振動との整合性が得られる．

この議論に一般性があるかどうかは重要である．筆者らは，このような観点から dilaton と電磁場を伴う球対称ブラックホール，GM–GHS 解[26]でも準固有振動を求めた[127]．驚くべきことにその表式は (9.14) と全く一致する．(9.14) で簡単に $T_{\rm BH}$ と書かれているものは GM–GHS 解では (2.58) のようにブラックホールの質量だけでなく，電荷や dilaton と電磁場の結合定数にも依存し，そうした場合でも統一的に書けるのである．Ashtekar らによると，地平面の外に物質場があっても，エントロピーの表式に影響を与えないはずである．このことからも上記の整合性は偶然ではないように思える．一方，単なる電磁場入り

*2)　17th International Conference on General Relativity and Gravitation において．

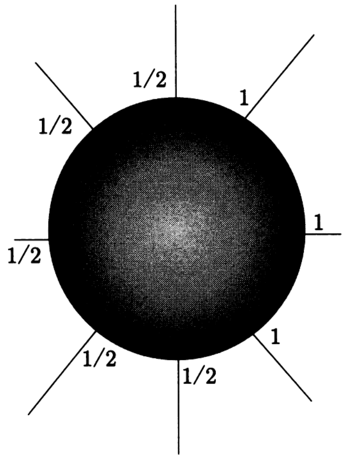


図 9.6 非球対称なスピンネットワーク分布を持つブラックホール.

のブラックホールでは (9.14) のようにならず[128]，今の所これを説明できない．また，筆者らはこの準固有振動がブラックホールの関数形にどのように依存するかを調べたが，Schwarzshild ブラックホールと結果が一致するのは内部地平面を持たないなど限られたタイプのモデルであることがわかった[129].

考察

これまでの結果を振り返ってみよう．(9.18) では $A_{\min}$ と dA を同一視している．しかし，(4.59) で面積が大きくなると，スピン j の足し合わせの数が多くなること，j の取りうる範囲が大きくなることの両方を反映して，面積固有値の間隔としての dA，あるいは第一法則から dM は急速に狭まっていき，連続スペクトルに近づく．これは単純な仮定 (9.10) との決定的な違いである．この違いは Hawking 輻射に現れる[122]．Hawking 輻射のピークの振動数はおよそ $\omega \sim 3T_{\rm BH}$ である．第一法則と (9.10) からは $dM \sim T_{\rm BH}$ なので，輻射は連続スペクトルを示さない．一方，ループ量子重力理論では，面積が Planck スケールに比べて充分に大きければ，輻射は連続スペクトルで近似できる．ブラックホール蒸発の様子がわかれば，量子重力理論のモデルにも制限が与えられるはずである．

9.4 自己組織化仮説

ループ量子重力理論の現在の定式化では，一般的に時間発展を追えるようにはなっていない．一様等方時空のようにあらかじめ対称性を課したモデルでは，体積固有値の増減と時間発展を対応させていたが，やや人為的である．近年では**スピンフォームモデル**というものが，スピンネットワークの時間発展を記述するものとして注目を集めているが，実際はループ量子重力理論そのものではなく，より単純化したモデルである．

それでは，と開き直ってしまって，逆にスピンネットワークの時間発展はどうあるべきか，という問題を非常に単純な模型で考えたのが Ansari と Smolin である[130]．ループ量子重力理論を元に“時空の誕生”という問題にどのようにアプローチすべきか考えてみる．非常に漠然とした問題ではあるが，宇宙の最初期には“古典的時空”になる前のスピンネットワークの塊があって，それが組み替わり，成長することで古典的時空が出来上がるというのが一つのシナリオだろう．インフレーションを起こすためにはスカラー場が存在するための古典的時空が必要であり，そのための“初期条件”を用意するという捉え方もできる．これを Ansari と Smolin は自己組織化仮説と呼んでいる．このアイデア自体は一般書にもうかがうことができ，かなり以前から構想は持っていたのだろう[131]．時空にも生物と同じような自己組織化の仕組みが働いているという考え方であり，興味深い．プレプリントでもこの考え方の要点を読むことができる[132]．

また，量子重力理論の他の候補の一つである**因果的動的単体分割**にも同様な考え方が見られる[9],[10]．あらかじめ時空の最小単位を用意しておき，それらの組み替え方のルールを決めておく．抽象的に次元を定義しておくと，最初は 2 次元に近い状態から 4 次元時空が再現されるというものである．余談になるが，筆者がこの話を初めて聞いたのはポツダムでの国際会議 LOOPS'05 であった．当時，日本ではブレーン宇宙論が流行しており，5 次元時空における宇宙論が盛んに議論されていた．おそらく超弦理論の会議では 10 次元や 11 次元の時空が議論されていると思われ，時空の次元が会議によって異なることに衝撃を受けたものである．

それでは“古典的時空”が持つ特性とは何だろうか？ 一番単純な Minkowski 時空での Newton 重力の働き方を元にすると，重力子が質量を持たない（質量を持っていたとしても非常に軽い）こともあってスケールを持たない，あるいはべきで周囲への影響が弱くなる，ということが挙げられるだろう．また，Planck スケールのような小さなスケールで極端な重力の強弱があってもいけない．これをスピンネットワークではどのように表すべきだろうか？ 簡単のため，図 9.7 のように，2 次元面上に“等間隔”にリンクとノードが並んでいる

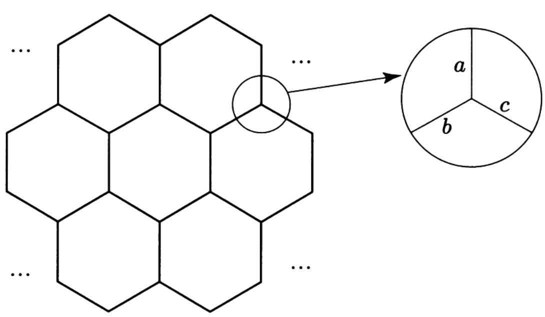


図 9.7 単純化したスピンネットワーク模型．

とする．“等間隔” と書いたのは，本来これ自体がスピンネットワークから決まるものだからである．各リンクが持つスピン a，b，c は (4.58) を満たす限り任意である．また，スピンネットワークを蜂の巣状に描いたのは，3 バレントのノードのみを考えるという仮定のためである．

この準備の下，次のような操作を行う．

1. ランダムにノードを選び，その周囲のリンクが持つスピンを 1 ずつ引く．
2. この操作をしたノードの近辺で (4.58) が破れているかどうかを見る．
3. 破れていれば，ノード周囲のリンクにスピンを 1 ずつ足す．この操作は左から右，上から下に行う．
4. 破れているものがなくなるまでこの操作を繰り返す．

具体例を図 9.8 に挙げる．図の左端が最初にスピンネットワークを用意した状態，次がランダムにノードを選び，その周囲のリンクが持つスピンを 1 ずつ引くという基本操作を行った状態である．右側 2 つでノード周囲のリンクにスピンを 1 ずつ足すという操作を行っている．この図では基本操作に対し，さらに 2 回余分な操作をしないと (4.58) が満たされなかったわけで，これを雪崩サイズ (avalanche size)$s = 2$ と定義する．一方，基本操作を行ってから (4.58) が満たされるまで，つまり図 9.8 の一連の操作を単位時間と定義する．このアイデア自体，統計力学で sandpile モデルと呼ばれるものに基づいている[133]．

Ansari らは 570 のリンク，371 の交点を持つスピンネットワークについて 1000 万単位時間計算した．勿論 “端” があるので，そこで雪崩は止まる．雪崩サイズ s とその雪崩の回数 P の関係を描いたものが図 9.9 である．$P(s) = s^{-1/3}$ でよく近似できることがわかる．論文ではこのべき則をもって，古典的時空の条件を満たしているのではないか？と締めくくっている．

最初から単純化した模型にすぎないのでこの結論については何とも言えないが，たたき台としては非常に面白い．単純に思いつくこととしては，“端” があるモデルだったので，周期的境界条件にしてはどうか，3 次元で同じモデルを考えるとどうか，などが挙げられる．また，簡単のために 3 バレントのノードしかない場合のみを扱っていたが，この場合の体積固有値は 0 である．“時空

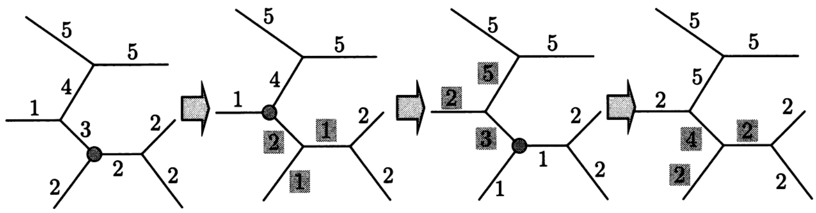


図 9.8　スピンネットワークの “時間発展”．

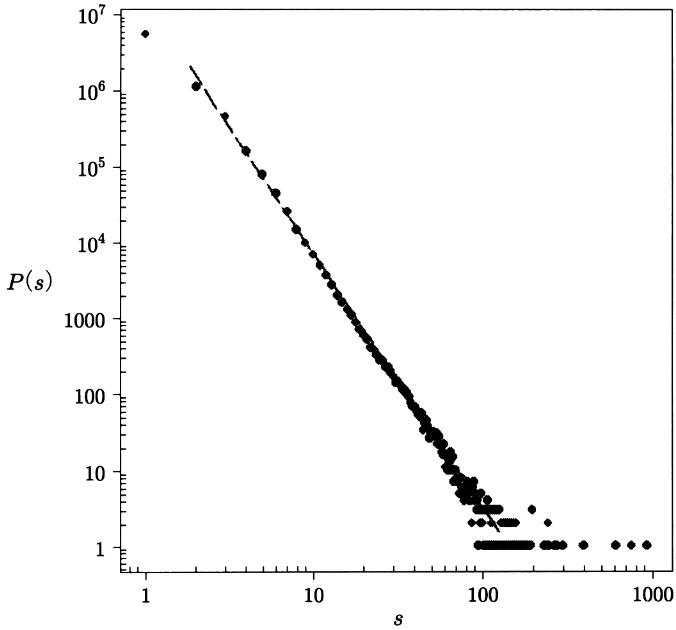


図 9.9　雪崩サイズ s とその雪崩の回数 P の関係（文献 [130] より）．

の始まり”はそれでもよいが，4 バレントのノードが生成されてゆくプロセスもなければ体積固有値は 0 のままであり，古典的時空とは呼べない．逆に言うと，体積のない 3 バレントのスピンネットワークの状態から，4 バレント以上の体積が 0 でない状態ができれば，まさに「無からの創生」であり，興味深い．また，因果的動的単体分割では抽象的に“次元”というものを定義し，4 次元時空ができてゆくかどうかを重要な基準にしているが，同様な考察は必要だろう．改良の余地は幾らでもあると言える．チャレンジしてみては如何だろうか？

9.5　宇宙線を用いた検証可能性

量子重力理論の効果を検証する代表的なものとしては初期宇宙を利用することが考えられるが，活動銀河中心核などからの高エネルギー宇宙線を用いる方法も注目を集めている．例えば，エネルギー E，運動量の大きさ k の光子の分散関係が高エネルギーで

$$k^2 = E^2 \left[1 + \chi \frac{E}{E_{\mathrm{QG}}} + O\left(\frac{E}{E_{\mathrm{QG}}} \right)^2 \right] \tag{9.19}$$

と変更されたとしよう．χ は 1 程度のファクター，E_{QG} は量子重力理論のエネルギースケールとする．すると光速 c' は

$$c' = \frac{\partial E}{\partial k} = 1 - \chi \frac{E}{E_{\mathrm{QG}}} + O\left(\frac{E}{E_{\mathrm{QG}}} \right)^2 \tag{9.20}$$

と書ける．この場合，光源と観測者の距離を L とすると $c' = 1$ で光が伝播し

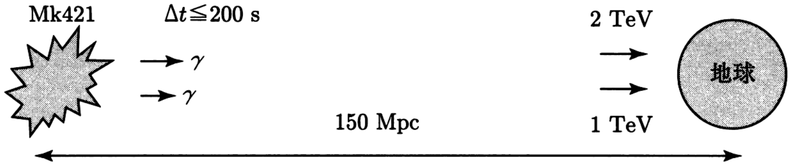


図 9.10　ガンマ線による Lorentz 不変性の検証.

た場合とのかかる時間の違い Δt は

$$\Delta t \simeq \chi \frac{E}{E_{\rm QG}} L \tag{9.21}$$

程度と評価される．例えば活動銀河中心核 Markarian421 から 200 s 以内の間隔で出たガンマ線が約 150 Mpc 離れた地球に，エネルギー 1 TeV，2 TeV でほぼ同時に検出されたとの報告例もある（図 9.10）[134],[135]．このような場合 $E_{\rm QG} > 7 \times 10^{16}$ GeV のような制限が付く．ここまでは一般的な話であり，Lorentz 不変性の破れを含む理論などと関連して注目を集めた[136],[137]．ループ量子重力理論ではどのように議論されるだろうか？

Gambini と Pullin は電磁場の Hamiltonian をループ量子重力理論の手法を用いて正則化すると，次のように分散関係が変更される可能性があると主張した[138]．

$$E = k(1 \pm \chi k G^{1/2}) \,. \tag{9.22}$$

$\pm$ は光子の helicity に依存する．元々の一般相対性理論で Minkowski 時空を考えれば Lorentz 不変性は保たれているが，$\chi \neq 0$ は時空の離散性を反映して導入される．この結果は注目を集め，論文の引用数も 300 を超えている．また，Smolin は一般向けの解説の中でもこの点に触れている[139]．しかし，第 4 章でも触れたように，ループ量子重力理論の枠組みから古典的な時空を導出するのは難しいことである．実際，(9.22) の導出をさかのぼると，途中で時空の偶奇性を破る効果を人為的に入れているのに気付く．この後も同様な効果は議論され続けたが，根本的には同じ問題がある[140]．つまり，不定性を逆手にとって人為的なパラメーターを導入した上で，このようなパラメーターに観測的な制限を付けましょう，という論法である．Bojowald らはこのようなやり方に懐疑的であり[141]，不確かなパラメーターを次々に導入して検証可能性をアピールするよりは古典的な時空を導出する手法を確立することの重要性を説いている．筆者も同じ意見であるが，逆にこのような効果が見つかり，説明はループ量子重力理論以外では難しい，という状況が生じれば面白い．

第 10 章
まとめと今後の課題

ループ量子重力理論は格子ゲージ理論をお手本とした理論で，一般相対性理論の変数からゲージポテンシャルに対応する変数に書き換えることを出発点としていた．そこからホロノミー，Wilson ループからつくられるスピンネットワークを基盤としていた．格子ゲージ理論との本質的な違いの一つに，格子間隔にあたるものを 0 とする極限は取らず，時空の離散的な構造を表すパラメーターと考えた点があった．

これを出発点とし，時空の一様等方性を仮定して量子化したモデルでは，宇宙の波動関数を表す方程式が従来の Wheeler–DeWitt 方程式（微分方程式）ではなく，差分方程式になるという特徴が見られた．スケールファクターの大小を時間発展と対応させることで，時空の発展を表す差分方程式と読み替えていた．古典論ではスケールファクターの逆べき a^{-1} の発散が，スカラー曲率の発散と直結しており，宇宙初期には特異点が現れていた．これをループ量子重力理論の手法に基づいて演算子化すると，このような発散は取り除くことができた．ただし，本当の特異点回避はこれだけでなく，波動関数の時間発展が体積固有値 0 に相当する箇所を超えて遡ることができるかどうかを基準にしていた．この可否は演算子順序による．問題点としては演算子順序や離散性の決め方に不定性があり，現段階では物理的な考察から不定性の範囲を絞ってゆく以外にないことが挙げられる．このような効果を取り入れたインフレーションモデルの議論も興味深い．

時空の対称性を緩めた他のモデルでも同様なことが議論されている．中でもブラックホール蒸発が進むとホワイトホールが形成され，外部に情報を吐き出すことでブラックホール情報喪失の問題を解決できるという描像は，今後の進展が期待されるところである．重力崩壊によって形成されるブラックホールの半径や質量に下限が生じる可能性，裸の特異点が回避される可能性は，ループ量子重力理論に共通の効果として理解することができる．

ブラックホールエントロピーに関しては，熱力学との類似性を議論した上で，

事象の地平面よりは類似性が深いと考えられる孤立地平面を定義し，この条件ならびに地平面のトポロジーの条件を量子化することで考察された．これらの条件と特定の面積を与えるスピンネットワークの配位をブラックホールエントロピーの統計力学的起源と考え，古典的な公式 $S = A/4G$ を再現すべきという要請から離散性を表す Barbero–Immirzi パラメーターを決定した．Schwarzschild ブラックホールを含む一般的なブラックホールで議論できる反面，不定パラメーターを利用しているという欠点があった．一方，超弦理論では極限ブラックホールに対しては曖昧さなしに $S = A/4G$ を導くことができる反面，適用可能なブラックホールは限定されていた．このため，しばしば相補的であると言われてきた．しかし，相補的と言うには多くの問題点を抱えていることは第 8 章で述べた通りである．仮に ABCK formalism を認めたとしても配位の数え方の不定性や Hamiltonian 拘束条件など考慮すべき問題が多い．逆にこの分野の研究は始まったばかりのフロンティア領域と言える．

これら以外にも興味深い話題は多く，その幾つかを第 9 章で取り上げた．宇宙項を伴う場合の全ての拘束条件を満たす Chern–Simons 解と関連した時空創生描像，この解と結び目理論との関連はループ量子重力理論の構築以前から注目されていた．変形量子化によるスピンネットワークを用いれば，この本で紹介した内容を全て並行して行える可能性がある．準固有振動を用いた面積量子化とブラックホールエントロピーの対応は量子重力理論の進展の鍵を握っている可能性があり，前期量子論において重要な役割を果たした Bohr の対応原理に相当するアイデアなのかもしれない．時空の生成に関わる自己組織化仮説はインフレーションの初期条件を与える可能性があるし，新しい「無からの創生」描像を提示してくれる．今後の発展次第では非常に面白い．宇宙線を用いた量子重力理論の検証は今後ますます重要性を増すことだろう．

今後の課題としては，まず第一に先に古典論を経由しないと殆ど物理的な議論ができない状況を抜け出すことが挙げられる．最初からスピンネットワークを用いて宇宙やブラックホールを表したい．特異点回避，ブラックホールエントロピーと言っても古典論を経由することで本質的な自由度が落ちてしまっている可能性がある．また，あくまで物質場は手で入れるだけであって統一理論的な観点は欠けている．逆に言うとこれらの課題を克服することで，これまでは議論の範囲外であった宇宙項の起源の問題なども解明されてゆく可能性を秘めている．現在は非常に荒削りで発展途上にあると言えるが，まえがきにも書いたように短期間で判断することにそれ程意味はない．この結論まで読んで読者はどのように感じるだろうか？ まだ大したことができていない，という印象が強いかもしれないし，未開の研究が残っていてやりがいがある，と感じるかもしれない．もし後者であれば筆者の目的は達成されたと言える．

付録 A
結び目理論

Wilson ループに運動量拘束条件を作用させたときの連続変形は，結び目理論における Reidemeister 変形で定義することができる．ここではこの理論についてまとめ，結び目不変量についても紹介する．

A.1 Reidemeister 変形

Wilson ループに運動量拘束条件を作用させると微小変形される．結び目理論はこのような 3 次元における結び目（閉じたループ）の連続変形の性質を調べる理論である．その変形の仕方は Reidemeister 変形と呼ばれる次の 3 つの変形の組み合わせで表されることがわかっている[142]．

これらは結び目の一部を取り出したものである．図 A.1 の中の RI, RII, RIII はそれぞれ Reidemeister 変形 I，II，III と呼ばれる操作に対応している．図で線が消えているように見える箇所は線の上下を表している．RI は直線状の部分をどちらかの向きにひねって輪っかをつくる操作に対応する．RII は 2 箇所の円弧を重なり合わせる操作に対応する．RIII はあみだくじの真ん中のものを少し動かしただけのように見え，必要性がわかりにくいかもしれない．お互いの

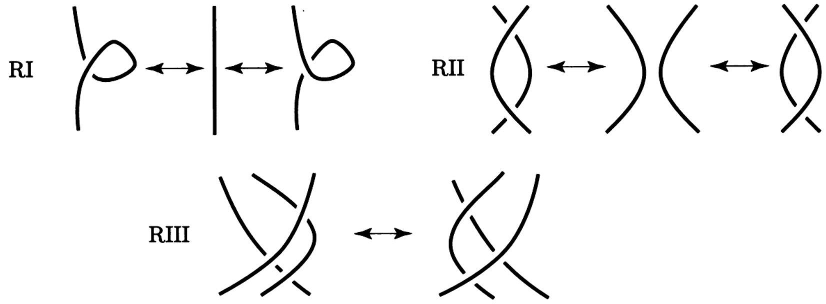


図 A.1　Reidemeister 変形 I，II，III.

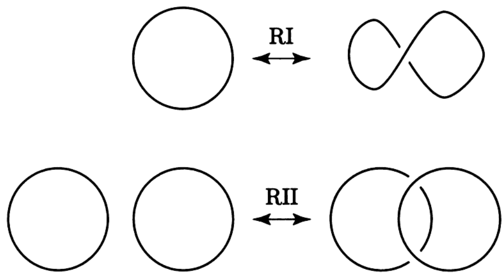


図 A.2　Reidemeister 変形の具体例.

上下関係が入れ替わっているわけではないことに注意して欲しい.

具体例を図 A.2 に示す. 上の図は単なる閉じたループを RI でひねったもの, 下の図は閉じたループ 2 つを RII で重ね合わせたものになっている. 結び目理論の課題の一つに, Reidemeister 変形による結び目不変量を調べることが挙げられる. ループ量子重力理論における運動量拘束条件の下での不変量を調べることと対応している. 不変量のうち, 最もわかりやすいのがループの数であろう. 図 A.2 上下においてループの数はそれぞれ 1, 2 であるが, これが Reidemeister 変形によって変化しないことは予想が付くことと思われる.

もう一つ, 結び目解消数というものを挙げておく. これは結び目の交点の上下を入れ替えて (Reidemeister 変形とは別物であることに注意されたい) 自明なループ (絡んだ部分のない輪っか) をつくるのに必要な操作の最少数のことである. 図 A.3 の左上の結び目ではこの数は 1 である. 左上の結び目のように絡まっていれば Reidemeister 変形を施したところで, 絡んだ部分がほどけることはない. これに左下のように, 点線で囲んだ部分の上下を入れ替えてやる. そうすると RII で右上のようになり, さらに RI で自明なループをつくることができる.

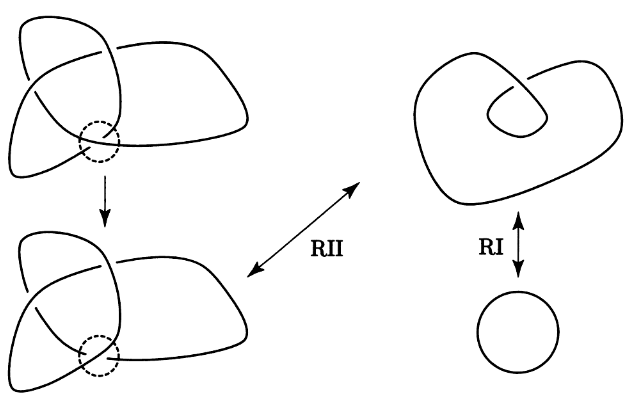


図 A.3　結び目の解消.

A.2 Jones 多項式と Chern–Simons 解

重要な結び目不変量に **Jones 多項式**が挙げられる．第 9 章で挙げた Chern–Simons 解はこの Jones 多項式との関連も指摘されており，量子重力理論にとっても見逃せないものである．Jones 多項式は 1 箇所だけ異なる 3 つの結び目に対して帰納的に定義される．まずは自明なループに対して Jones 多項式は 1 で定義され，これを

$$V_\circ := 1 \tag{A.1}$$

と表す．次に図 A.4 のように結び目に向きを付け，1 箇所だけ異なる 3 つの結び目 K_+, K_-, $K_\circ$ に対してもつれ (skein) 関係式

$$tV_{K_+}(t) - t^{-1}V_{K_-}(t) = -(t^{1/2} - t^{-1/2})V_{K_\circ}(t) \tag{A.2}$$

を要請する．

具体例を図 A.5 に示す．この図の K_+, K_- に対応するものは RI によって自明なループにすることができるので $V_{K_+}(t) = V_{K_-}(t) = V_\circ = 1$ である．これを (A.2) に代入すれば $V_{K_\circ}(t) = -(t^{1/2} - t^{-1/2})$ が得られる．$V_{K_\circ}(t)$ は自明なループを 2 つ並べたものなので $V_{2\circ}$ と書くことにすると

$$V_{2\circ} = -(t^{1/2} - t^{-1/2}) \tag{A.3}$$

を示せたことになる．自明なループは Reidemeister 変形によって逆向きに直すこともできるので本当は向きは気にしなくてよい．

もう一つ具体例を図 A.6 に示す．図 A.5 の対応するループにそれぞれ 1 つずつ自明なループを足したものになっている．この図の K_+, K_- に対応するものは RI によって自明なループ 2 つに変形することができるので，(A.3) より，$V_{K_+}(t) = V_{K_-}(t) = -(t^{1/2} - t^{-1/2})$ である．これを (A.2) に代入すれば

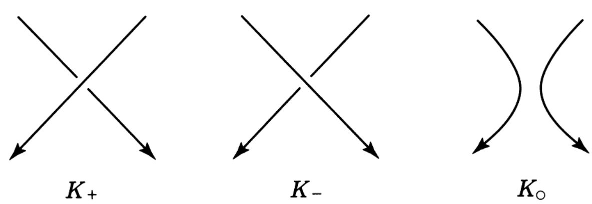


図 A.4　3 つの結び目 K_+, K_-, $K_\circ$.

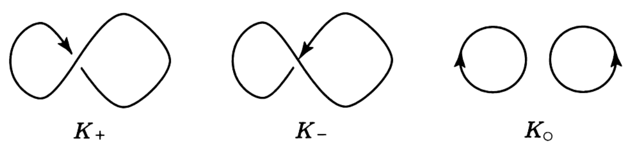


図 A.5　図 A.4 の具体例 I.

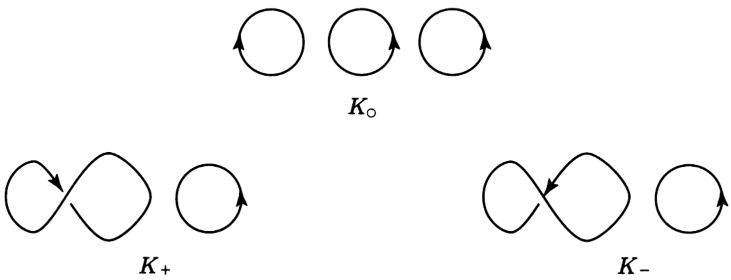


図 A.6　図 A.4 の具体例 II.

$V_{K_\circ}(t) = [-(t^{1/2} - t^{-1/2})]^2$ が得られる．$V_{K_\circ}(t)$ は自明なループを 3 つ並べたものなので $V_{3\circ}$ と書くことにすると

$$V_{3\circ} = [-(t^{1/2} - t^{-1/2})]^2 \tag{A.4}$$

を示せたことになる．同様な操作を繰り返すことで帰納的に

$$V_{n\circ} = [-(t^{1/2} - t^{-1/2})]^{n-1} \tag{A.5}$$

を示すことができる．

一般に $V(t)$ が異なれば異なるループであることが言えるが，逆は成り立たないので注意が必要である．Chern–Simons 解に Wilson ループをかけて積分した (9.7) は Jones 多項式を用いて表すことができる．この解が我々の宇宙を表しているかどうかはさておき，宇宙を表す波動関数がこのような結び目不変量で表すことができるという可能性は注目に値する．

付録 B
計算補足

ここでは導出が煩雑と思われる一連の計算をまとめる．主に参照したのはWald[4] と Thiemann の教科書[53]である．

B.1　4 次元曲率と 3 次元曲率の関係

(3.1) から (3.3) を導く．4 次元時空中の 3 次元超曲面 Σ における計量を $h_{\mu\nu}$，$\tilde{\nabla}_\alpha h_{\mu\nu} = 0$ を満たす 3 次元の共変微分を $\tilde{\nabla}_\alpha$ として

$$\tilde{\nabla}_\alpha T^\mu{}_\nu = h_\alpha{}^\delta h^\mu{}_\beta h_\nu{}^\gamma \nabla_\delta T^\beta{}_\gamma \tag{B.1}$$

と表せることを用いる[4]．$T^\mu{}_\nu, \nabla_\delta$ はそれぞれ 4 次元時空のテンソル，共変微分である．(2.27) の 4 次元の場合と同様に，Σ 上のベクトルを V_ν として

$$R^{(3)}_{\alpha\beta\mu}{}^\nu V_\nu = \left(\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta - \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\alpha\right) V_\mu \tag{B.2}$$

と書ける．(B.1) より

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta V_\mu &= \tilde{\nabla}_\alpha \left(h_\beta{}^\gamma h_\mu{}^\nu \nabla_\gamma V_\nu\right) = h_\alpha{}^\epsilon h_\beta{}^\theta h_\mu{}^\lambda \nabla_\epsilon \left(h_\theta{}^\gamma h_\lambda{}^\nu \nabla_\gamma V_\nu\right) \\
&= h_\alpha{}^\epsilon h_\beta{}^\gamma h_\mu{}^\nu \nabla_\epsilon \nabla_\gamma V_\nu \\
&\quad + h_\alpha{}^\epsilon h_\beta{}^\gamma h_\mu{}^\lambda \left(\nabla_\gamma V_\nu\right) \nabla_\epsilon h_\lambda{}^\nu + h_\alpha{}^\epsilon h_\beta{}^\theta h_\mu{}^\nu \left(\nabla_\gamma V_\nu\right) \nabla_\epsilon h_\theta{}^\gamma \ .
\end{aligned} \tag{B.3}$$

(B.3) の 2，3 項目に注目しよう．(3.4) を用いると

$$\begin{aligned}
h_\alpha{}^\epsilon h_\mu{}^\lambda \nabla_\epsilon h_\lambda{}^\nu &= h_\alpha{}^\epsilon h_\mu{}^\lambda \nabla_\epsilon \left(g_\lambda{}^\nu + n_\lambda n^\nu\right) \\
&= h_\alpha{}^\epsilon h_\mu{}^\lambda \left(n^\nu \nabla_\epsilon n_\lambda + n_\lambda \nabla_\epsilon n^\nu\right) = K_{\alpha\mu} n^\nu
\end{aligned} \tag{B.4}$$

と書けるので，これを (B.3) に代入して

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta V_\mu &= h_\alpha{}^\epsilon h_\beta{}^\gamma h_\mu{}^\nu \nabla_\epsilon \nabla_\gamma V_\nu + h_\beta{}^\gamma K_{\alpha\mu} n^\nu \nabla_\gamma V_\nu + h_\mu{}^\nu K_{\alpha\beta} n^\gamma \nabla_\gamma V_\nu \\
&= h_\alpha{}^\epsilon h_\beta{}^\gamma h_\mu{}^\nu \nabla_\epsilon \nabla_\gamma V_\nu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ h_\beta{}^\gamma K_{\alpha\mu}\left[\nabla_\gamma(V_\nu n^\nu) - V_\nu \nabla_\gamma n^\nu\right] + h_\mu{}^\nu K_{\alpha\beta} n^\gamma \nabla_\gamma V_\nu \\
&= h_\alpha{}^\epsilon h_\beta{}^\gamma h_\mu{}^\nu \nabla_\epsilon \nabla_\gamma V_\nu - K_{\alpha\mu} K_\beta{}^\nu V_\nu + h_\mu{}^\nu K_{\alpha\beta} n^\gamma \nabla_\gamma V_\nu \ . \qquad \text{(B.5)}
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
R^{(3)}_{\alpha\beta\mu}{}^\nu V_\nu &= \left(\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta - \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\alpha\right) V_\mu \\
&= h_\alpha{}^\epsilon h_\beta{}^\gamma h_\mu{}^\nu \left(\nabla_\epsilon \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\epsilon\right) V_\nu - K_{\alpha\mu} K_\beta{}^\nu V_\nu + K_{\beta\mu} K_\alpha{}^\nu V_\nu \\
&= h_\alpha{}^\epsilon h_\beta{}^\gamma h_\mu{}^\nu h^\delta{}_\theta R_{\epsilon\gamma\nu}{}^\theta V_\delta - K_{\alpha\mu} K_\beta{}^\nu V_\nu + K_{\beta\mu} K_\alpha{}^\nu V_\nu \\
&= \left(h_\alpha{}^\epsilon h_\beta{}^\gamma h_\mu{}^\delta h^\nu{}_\theta R_{\epsilon\gamma\delta}{}^\theta - K_{\alpha\mu} K_\beta{}^\nu + K_{\beta\mu} K_\alpha{}^\nu\right) V_\nu \ . \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}
$$

これより

$$
R^{(3)}_{\alpha\beta\mu}{}^\nu = h_\alpha{}^\epsilon h_\beta{}^\gamma h_\mu{}^\delta h^\nu{}_\theta R_{\epsilon\gamma\delta}{}^\theta - K_{\alpha\mu} K_\beta{}^\nu + K_{\beta\mu} K_\alpha{}^\nu \qquad \text{(B.7)}
$$

が成り立つ．縮約を取れば

$$
R^{(3)} := R^{(3)}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} = h^{\epsilon\delta} h^{\gamma\theta} R_{\epsilon\gamma\delta\theta} - K^2 + K_{\beta\alpha} K^{\beta\alpha} \qquad \text{(B.8)}
$$

が得られる．また，

$$
\begin{aligned}
h^{\epsilon\delta} h^{\gamma\theta} R_{\epsilon\gamma\delta\theta} &= R_{\epsilon\gamma\delta\theta}\left(g^{\epsilon\delta} + n^\epsilon n^\delta\right)\left(g^{\gamma\theta} + n^\gamma n^\theta\right) \\
&= R + 2 R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \qquad \text{(B.9)}
\end{aligned}
$$

である．上では添字の反対称性 $R_{\epsilon\gamma\delta\theta} = -R_{\gamma\epsilon\delta\theta}$ から $R_{\epsilon\gamma\delta\theta} n^\epsilon n^\gamma n^\delta n^\theta = 0$ が言えることを用いている．$R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta$ に注目すると，これは

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta &= R_{\alpha\gamma\beta}{}^\gamma n^\alpha n^\beta \\
&= -n^\alpha \left(\nabla_\alpha \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\alpha\right) n^\gamma \\
&= (\nabla_\alpha n^\alpha) \nabla_\gamma n^\gamma - \nabla_\alpha (n^\alpha \nabla_\gamma n^\gamma) - (\nabla_\gamma n^\alpha) \nabla_\alpha n^\gamma + \nabla_\gamma (n^\alpha \nabla_\alpha n^\gamma) \\
&= K^2 - K_{\alpha\gamma} K^{\alpha\gamma} \qquad \text{(B.10)}
\end{aligned}
$$

と書き換えられる．ただし，最後の行で全微分の項は無視した．(B.8)～(B.10) より

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g} R &= N \sqrt{h} (h^{\epsilon\delta} h^{\gamma\theta} R_{\epsilon\gamma\delta\theta} - 2 R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta) \\
&= N \sqrt{h} (R^{(3)} - K^2 + K_{\beta\alpha} K^{\beta\alpha}) \qquad \text{(B.11)}
\end{aligned}
$$

が得られ，(3.1) から (3.3) が導かれた．

B.2 曲率とスピン接続の関係

スピン接続や Ashtekar 接続と関係した計算は，フォーム (form) を用いるこ

とで大幅に簡略化される．しかし，数学的準備に要するページ数に比べてこの本でそうした恩恵を感じられる部分が比較的少ないこともあってフォームで書くことはしなかった．そのために煩雑となった計算をここにまとめる．ここでは Hamiltonian 拘束条件 (4.41) を (4.42) に書き換えるための準備をする．三脚場を用いた 3 次元の曲率テンソルの成分を

$$R_{IJKL} := R_{abcd} e^a_I e^b_J e^c_K e^d_L \tag{B.12}$$

で定義する[4]．これを

$$R_{IJ}{}^{KL} = e^a_I e^b_J R^{KL}_{ab} \tag{B.13}$$

と書き直す．ただし，(2.27) と同様に

$$R^{KL}_{ab} := e^K_c (\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b - \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a) e^{Lc} \tag{B.14}$$

とする．ここで

$$\begin{aligned} e^K_c \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b e^{Lc} &= \tilde{\nabla}_a (e^K_c \tilde{\nabla}_b e^{Lc}) - (\tilde{\nabla}_a e^K_c) \tilde{\nabla}_b e^{Lc} \\ &= \tilde{\nabla}_a \omega_b{}^{KL} - (\tilde{\nabla}_a e^K_c) \tilde{\nabla}_b e^{Lc} \end{aligned} \tag{B.15}$$

であり，最後の項は $\delta^d_c = e^M_c e^{Md}$ を用いれば

$$(\tilde{\nabla}_a e^K_c) \tilde{\nabla}_b e^{Lc} = (\tilde{\nabla}_a e^K_d) e^M_c e^{Md} \tilde{\nabla}_b e^{Lc} = \omega_a{}^{MK} \omega_b{}^{ML} \tag{B.16}$$

と書き換えられる．(B.15) と (B.16) を (B.14) に代入すれば

$$R^{JK}_{ab} = 2\partial_{[a} \omega_{b]}{}^{JK} + 2\omega_{[a}{}^{MJ} \omega_{b]}{}^{MK} \tag{B.17}$$

の形に書き直せる．ここで，Christoffel 記号の下付き添字の対称性から $\tilde{\nabla}_{[a} \omega_{b]}{}^{JK} = \partial_{[a} \omega_{b]}{}^{JK}$ を使っている．$R^{(3)} := -R_{JK}{}^{JK}$ のように縮約を取れば

$$R^{(3)} = -e^a_J e^b_K R^{JK}_{ab} \tag{B.18}$$

が得られる．

有用な関係式

$$\epsilon_{IJK} \epsilon^{ILM} = \delta^L_J \delta^M_K - \delta^L_K \delta^M_J \tag{B.19}$$

を用いれば，(4.10) から逆に

$$\omega_a{}^{LM} = \epsilon^{ILM} \Gamma^I_a \tag{B.20}$$

と求めることができる．(B.17) と

$$R^I_{ab} := 2\partial_{[a}\Gamma^I_{b]} + \epsilon_{ILM}\Gamma^L_a\Gamma^M_b \tag{B.21}$$

の関係は，(B.19) と (B.20) から

$$R^{JK}_{ab} = R^I_{ab}\epsilon^{IJK} \tag{B.22}$$

のように求めることができる．従って

$$\boxed{R^{(3)} = -e^a_J e^b_K R^I_{ab}\epsilon^{IJK}} \tag{B.23}$$

である．また，(B.22) から

$$\epsilon^{IJK}R^{JK}_{ab} = 2R^I_{ab} \tag{B.24}$$

である．Bianchi の恒等式 $R_{[abc]d} = 0$ 及び (B.12), (B.13) から

$$2E^b_I R^I_{ab} = \epsilon^{IJK}E^b_I R^{JK}_{ab} = 0 \tag{B.25}$$

となることがわかる．

B.3 運動量拘束条件及び Hamiltonian 拘束条件の書き換え

以上の準備の下で運動量拘束条件 (3.16) 及び Hamiltonian 拘束条件 (4.41) をそれぞれ (4.22) 及び (4.42) に書き換える[53]．運動量拘束条件は Ashtekar 接続でも実接続でも式の形は同じである．これらの計算を行うにはまず (4.9) と (4.16) から

$$\begin{aligned} K^2 &= K^I_a K^J_b E^a_I E^b_J/h, \\ K_{ab}K^{ab} &= K^I_b K^J_a E^a_I E^b_J/h \end{aligned} \tag{B.26}$$

が成り立つことに注意する．従って

$$K^2 - K_{ab}K^{ab} = 2E^a_I E^b_J K^I_{[a}K^J_{b]}/h\ . \tag{B.27}$$

一方，(4.24) 及び (B.21) に (4.40) を代入すると

$$\begin{aligned} F^I_{ab} = R^I_{ab} &+ 2\gamma\partial_{[a}K^I_{b]} + \gamma^2\epsilon^{ILM}K^L_a K^M_b \\ &+ \gamma\epsilon^{ILM}(\Gamma^L_a K^M_b + \Gamma^M_b K^L_a)\ . \end{aligned} \tag{B.28}$$

スピン接続を用いた共変微分 $D_a K^I_b := \partial_a K^I_b + \epsilon^{ILM}\Gamma^L_a K^M_b - \Gamma^c_{ab}K^I_c$ を用いて 2 項目 4 項目をまとめると

$$\boxed{2\gamma D_{[a}K^I_{b]} = F^I_{ab} - R^I_{ab} - \gamma^2\epsilon^{ILM}K^L_a K^M_b} \tag{B.29}$$

のように書ける．これがいずれの拘束条件を得る上でも重要である．

これに E_I^b を作用させると Bianchi の恒等式 (B.25) 及びゲージ拘束条件 (4.20) から右辺第 2, 3 項が消え，

$$2\gamma E_I^b D_{[a}K_{b]}^I = E_I^b F_{ab}^I \tag{B.30}$$

と書ける．(3.16), (4.9), (4.16) から $H_a \propto E_I^b D_{[a}K_{b]}^I$ ということがわかるため，運動量拘束条件 (4.22)，即ち $E_I^b F_{ab}^I = 0$ が得られる．

(B.29) に $e_J^a e_K^b \epsilon^{IJK}$ を作用させると，左辺がゲージ拘束条件によって消え，(B.23) を用いると

$$\begin{aligned}
-R^{(3)} &= \epsilon^{IJK} F_{ab}^I e_J^a e_K^b - \gamma^2 e_J^a e_K^b (\delta_L^J \delta_M^K - \delta_L^K \delta_M^J) K_a^L K_b^M \\
&= \epsilon^{IJK} F_{ab}^I e_J^a e_K^b - 2\gamma^2 e_J^a e_K^b K_{[a}^J K_{b]}^K \\
&= (\epsilon^{IJK} F_{ab}^I E_J^a E_K^b - 2\gamma^2 E_J^a E_K^b K_{[a}^J K_{b]}^K)/h \;.
\end{aligned} \tag{B.31}$$

ただし，(B.19) を用いた．従って，(B.27), (B.31) 及び $h = E$ から (4.42) が得られる．

B.4 インフレーション等で用いる補正

(6.65) を導出するため，(6.45) の括弧の中を $F(q)$ と置く．$l = 3/4, \mu = 2qj$ を代入し，$j \gg 1, q > 1$ の場合を考えると

$$F(q) \simeq 2j^{-3} \left(\frac{8\pi\gamma G}{3}\right)^{-1/4} \sum_{m=1}^{j} m \left[(qj+m)^{3/4} - (qj-m)^{3/4}\right].$$

従って，

$$\begin{aligned}
&\frac{F(q)}{2} j^3 \left(\frac{8\pi\gamma G}{3}\right)^{1/4} \\
&= \sum_{m=1}^{j} \left[(qj+m)^{3/4}(qj+m-qj) + (qj-m-qj)(qj-m)^{3/4}\right] \\
&= \sum_{m=1}^{j} \left[(qj+m)^{7/4} - qj(qj+m)^{3/4} + (qj-m)^{7/4} - qj(qj-m)^{3/4}\right] \\
&= \left[\sum_{n=qj+1}^{(q+1)j} (n^{7/4} - qjn^{3/4}) + \sum_{n=(q-1)j}^{qj-1} (n^{7/4} - qjn^{3/4})\right] \\
&= \left[\left(\sum_{n=1}^{(q+1)j} - \sum_{n=1}^{qj}\right)(n^{7/4} - qjn^{3/4}) \right. \\
&\qquad \left. + \left(\sum_{n=1}^{qj-1} - \sum_{n=1}^{(q-1)j-1}\right)(n^{7/4} - qjn^{3/4})\right]
\end{aligned}$$

$$\simeq \left[\sum_{n=1}^{(q+1)j} (n^{7/4} - qjn^{3/4}) - \sum_{n=1}^{(q-1)j-1} (n^{7/4} - qjn^{3/4}) \right] . \tag{B.32}$$

次に，積分を和で近似すると，

$$\int_0^1 x^r dx \simeq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N} \left(\frac{n}{N}\right)^r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{n=1}^{N} n^r$$

なので，

$$\sum_{n=1}^{N} n^r \simeq N^{r+1} \int_0^1 x^r dx = \frac{N^{r+1}}{r+1} .$$

これを用いると

$$\begin{aligned} F(q) &\simeq 2j^{-3} \left(\frac{8\pi\gamma G}{3}\right)^{-1/4} \left[\frac{4}{11}\{(q+1)j\}^{11/4} - \frac{4}{7}qj\{(q+1)j\}^{7/4} \right. \\ &\qquad \left. - \frac{4}{11}\{(q-1)j\}^{11/4} + \frac{4}{7}qj\{(q-1)j\}^{7/4}\right] \\ &= 2\left(\frac{8\pi\gamma Gj}{3}\right)^{-1/4} \left[\frac{4}{11}(q+1)^{11/4} - \frac{4}{7}q(q+1)^{7/4} \right. \\ &\qquad \left. - \frac{4}{11}(q-1)^{11/4} + \frac{4}{7}q(q-1)^{7/4}\right] \\ &= 2q^{1/4}a^{-1/2} \left[\frac{4}{11}(q+1)^{11/4} - \frac{4}{7}q(q+1)^{7/4} \right. \\ &\qquad \left. - \frac{4}{11}(q-1)^{11/4} + \frac{4}{7}q(q-1)^{7/4}\right] . \end{aligned} \tag{B.33}$$

これを (6.45) に代入すれば (6.65) が得られる．$q < 1$ の場合も同様である．

参考文献

[1] S.W. Hawking, Nature **248**, 30 (1974); Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).

[2] P. Hořava, Phys. Rev. D **79**, 084008 (2009).

[3] 別冊・数理科学「スーパーストリング」, サイエンス社 (2005 年 10 月).

[4] R.M. Wald, *General Relativity*, (The university of Chicago Press, Chicago, 1984).

[5] 葛西真寿, 数理科学 2000 年 4 月号, pp.40–45, サイエンス社 (2000).

[6] I.M. Moroz, R. Penrose and P. Tod, Class. Quantum Grav. **15**, 2733 (1998).

[7] A. Perez, H. Sahlmann and D. Sudarsky, Class. Quantum Grav. **23**, 2317 (2006).

[8] R. Penrose, 皇帝の新しい心, みすず書房 (1994); 心の影 1, 2, みすず書房 (2001).

[9] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz and R. Loll, Phys. Rev. D **64**, 044011 (2001).

[10] 時間とは何か?, 別冊日経サイエンス, 日経サイエンス社 (2011).

[11] R. Sorkin, gr-qc/0309009.

[12] A. Connes, 非可換幾何学入門, 岩波書店 (1999).

[13] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).

[14] N. Bodendorfer, T. Thiemann and A. Thurn, Class. Quantum Grav. **30**, 045006 (2013); *ibid.*, 045007 (2013); *ibid.*, Phys. Lett. B **711**, 205 (2012).

[15] N. Bodendorfer, T. Thiemann and A. Thurn, Class. Quantum Grav. **30**, 045001 (2013); *ibid.*, 045002 (2013); *ibid.*, 045003 (2013); *ibid.*, 045004 (2013); *ibid.*, **31**, 055002 (2014).

[16] S. Bilson-Thompson, J. Hackett, L. Kauffman and Y. Wan, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, **8**, 014 (2012).

[17] L. Susskind, 宇宙のランドスケープ, 日経 BP 社 (2006).

[18] C. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1981).

[19] Landau and Lifshitz, 場の古典論, 東京図書 (1984).

[20] A.R. Liddle and D.H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

[21] 辻川信二, 現代宇宙論講義, SGC ライブラリ 99, サイエンス社 (2013).

[22] 小特集「宇宙マイクロ波背景放射の新展開」, 日本物理学会誌 **69**, 10 月号 (2014).

[23] A.V. Frolov, Phys. Rev. Lett. **101**, 061103 (2008).

[24] 辻川信二, 暗黒エネルギーと修正重力理論, 日本物理学会誌 **69**, 444, 7 月号 (2014).

[25] 朝永振一郎, 量子力学 I, みすず書房 (1969).

[26] G.W. Gibbons and K. Maeda, Nucl. Phys. B **298**, 741 (1988); D. Garfinkle, G.T. Horowitz and A. Strominger, Phys. Rev. D **43**, 3140 (1991).

[27] W.G. Unruh and R.M. Wald, Phys. Rev. D **25**, 942 (1972).

[28] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, (Cambridge monographs on mathematical physics, Cambridge, 1973).

[29] W. Israel, Phys. Rev. Lett. **57**, 397 (1986).

[30] A. Vilenkin, Phys. Lett. B **117**, 25 (1982).

[31] J.B. Hartle and S.W. Hawking, Phys. Rev. D **28**, 2960 (1983).

[32] ホーキングとペンローズが語る時空の本質，林一訳，早川書房 (1997).

[33] A. Vilenkin, Phys. Rev. D **30**, 509 (1984).

[34] J.J. Halliwell and J. Louko, Phys. Rev. D **39**, 2206 (1989).

[35] 河原林研，量子力学，岩波講座 現代の物理学 3，岩波書店 (1993).

[36] A. Ashtekar, M. Bojowald and J. Lewandowski, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 233 (2003).

[37] A. Ashtekar, S. Fairhurst and J. Willis, Class. Quantum Grav. **20**, 1031 (2003).

[38] B. Brügmann, R. Gambini and J. Pullin, Nucl. Phys. B **385**, 587 (1992).

[39] A. Okolów and J. Lewandowski, Class. Quantum Grav. **20**, 3543 (2003); H. Sahlmann, J. Math. Phys. **52**, 012502 (2011); *ibid.*, 012503 (2011).

[40] R. Gambini and J. Pullin, *Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).

[41] C. Rovelli and L. Smolin, Phys. Rev. Lett. **61**, 1155 (1988).

[42] C. Rovelli and L. Smolin, Nucl. Phys. B **331**, 80 (1990).

[43] J.F. Barbero G., Phys. Rev. D **51**, 5507 (1995); G. Immirzi, Nucl. Phys. Proc. Suppl. B **57**, 65 (1997).

[44] A. Ashtekar, C. Rovelli and L. Smolin, Phys. Rev. Lett. **69**, 237 (1992).

[45] C. Rovelli, Class. Quantum Grav. **9**, 1613 (1991).

[46] H. Sahlmann, T. Thiemann and O. Winkler, Nucl. Phys. B **606**, 401 (2001).

[47] C. Rovelli and L. Smolin, Phys. Rev. D **52**, 5743 (1995).

[48] C. Rovelli and L. Smolin, Nucl. Phys. B **442**, 593 (1995); Erratum, *ibid.*, **456**, 753 (1995).

[49] R. Pietri and C. Rovelli, Phys. Rev. D **54**, 2664 (1996).

[50] J. Brunnemann and T. Thiemann, Class. Quantum Grav. **23**, 1289 (2006).

[51] M. Bojowald, Class. Quantum Grav. **19**, 5113 (2002).

[52] T. Thiemann, Phys. Lett. B **380**, 257 (1996).

[53] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).

[54] A. Ashtekar, New J. Phys. **7**, 198 (2005).

[55] A. Ashtekar, T. Pawlowski and P. Singh, Phys. Rev. D **73**, 124038 (2006).

[56] A. Ashtekar, T. Pawlowski and P. Singh, Phys. Rev. D **74**, 084003 (2006).

[57] A. Ashtekar, T. Pawlowski, P. Singh and K. Vandersloot, Phys. Rev. D **75**, 024035 (2007).

[58] M. Bojowald, Phys. Rev. Lett. **86**, 5227 (2001).

[59] T. Tanaka, F. Amemiya, M. Shimano, T. Harada and T. Tamaki, Phys. Rev. D **83**, 104049 (2011).

[60] A. Corichi and P. Singh, Phys. Rev. D **78**, 024034 (2008).
[61] 辻川信二，ループ量子宇宙論，別冊・数理科学「量子重力理論」，サイエンス社 (2009 年 10 月).
[62] T. Thiemann, Class. Quantum Grav. **15**, 1281 (1998).
[63] M. Bojowald and K. Vandersloot, Phys. Rev. D **67**, 124023 (2003).
[64] A.D. Linde, Phys. Lett. B **108**, 389 (1982).
[65] S. Tsujikawa, P. Singh and R. Maartens, Class. Quantum Grav. **21**, 5767 (2004).
[66] O. Seto, J. Yokoyama and H. Kodama, Phys. Rev. D **61**, 103504 (2000).
[67] D.J. Mulryne and N.J. Nunes, Phys. Rev. D **74**, 083507 (2006).
[68] K. Vandersloot, Phys. Rev. D **71**, 103506 (2005).
[69] M. Bojowald, J.E. Lidsey, D.J. Mulryne, P. Singh and R. Tavakol, Phys. Rev. D **70**, 043530 (2004).
[70] J.E. Lidsey, D.J. Mulryne, N.J. Nunes and R. Tavakol, Phys. Rev. D **70**, 063521 (2004).
[71] G.M. Hossain, Class. Quantum Grav. **22**, 2511 (2005).
[72] G. Date and G.M. Hossain, Phys. Rev. Lett. **94**, 011301 (2005).
[73] D.J. Mulryne, R. Tavakol, J.E. Lidsey and G.F.R. Ellis, Phys. Rev. D **71**, 123512 (2005).
[74] P. Singh, Class. Quantum Grav. **22**, 4203 (2005).
[75] N.J. Nunes, Phys. Rev. D **72**, 103510 (2005).
[76] M. Kagan, Phys. Rev. D **72**, 104004 (2005).
[77] P. Singh and K. Vandersloot, Phys. Rev. D **72**, 084004 (2005).
[78] E.J. Copeland, J.E. Lidsey and S. Mizuno, Phys. Rev. D **73**, 043503 (2006).
[79] M. Bojowald and M. Kagan, Phys. Rev. D **74**, 044033 (2006).
[80] G. Calcagni and M. Cortês, Class. Quantum Grav. **24**, 829 (2007).
[81] J. Magueijo and P. Singh, Phys. Rev. D **76**, 023510 (2007).
[82] E.J. Copeland, D.J. Mulryne, N.J. Nunes and M. Shaeri, Phys. Rev. D **77**, 023510 (2008).
[83] M. Shimano and T. Harada, Phys. Rev. D **80**, 063538 (2009).
[84] M. Bojowald and G.M. Hossain, Class. Quantum Grav. **24**, 4801 (2007).
[85] M. Bojowald and G.M. Hossain, Phys. Rev. D **77**, 023508 (2008).
[86] M. Bojowald, G.M. Hossain, M. Kagan and S. Shankaranarayanan, Phys. Rev. D **78**, 063547 (2008); *ibid.*, Phys. Rev. D **79**, 043505 (2009); *Erratum ibid.*, **82**, 109903 (2010).
[87] M. Bojowald and G. Calcagni, JCAP, **03**, 032 (2011).
[88] M. Bojowald, G. Calcagni and S. Tsujikawa, JCAP **11**, 046 (2011).
[89] A. Barrau, M. Bojowald, G. Calcagni, J. Grain and M. Kagan, arXiv:1404.1018 [gr-qc].
[90] M. Bojowald, Class. Quantum Grav. **17**, 1489 (2000); *ibid.*, 1509 (2000).
[91] 佐藤文隆・小玉英雄，一般相対性理論，岩波講座 現代の物理学 6，岩波書店 (1992).
[92] M. Bojowald, Class. Quantum Grav. **20**, 2595 (2003); M. Bojowald, G. Date and K. Vandersloot, Class. Quantum Grav. **21**, 1253 (2004).
[93] A. Ashtekar and E. Wilson-Ewing, Phys. Rev. D **80**, 123532 (2009).
[94] M. Bojowald, Phys. Rev. Lett. **95**, 061301 (2005); A. Ashtekar and M. Bojowald, Class.

Quantum Grav. **23**, 391 (2006); M. Bojowald, AIP Conf. Proc. **910**, 294 (2007).
[95] R. Gambini and J. Pullin, Phys. Rev. Lett. **110**, 211301 (2013).
[96] R. Gambini and J. Pullin, arXiv:1408.3050 [gr-qc].
[97] S.D. Mathur, hep-th/0502050, 0510180.
[98] M. Bojowald, R. Goswami, R. Maartens and P. Singh, Phys. Rev. Lett. **95**, 091302 (2005); M. Bojowald, gr-qc/0602100.
[99] M. Bojowald, T. Harada and R. Tibrewala, Phys. Rev. D **78**, 064057 (2008); M. Bojowald, J.D. Reyes and R. Tibrewala, Phys. Rev. D **80**, 084002 (2009).
[100] J. Brunnemann and T. Thiemann, Class. Quantum Grav. **23**, 1429 (2006).
[101] A. Ashtekar, A. Corichi and K. Krasnov, Adv. Theor. Math. Phys. **3**, 419 (1999).
[102] A. Ashtekar, C. Beetle and S. Fairhurst, Class. Quantum Grav. **17**, 253 (2000).
[103] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi and K. Krasnov, Phys. Rev. Lett. **80**, 904 (1998).
[104] A. Ashtekar, J. Baez and K. Krasnov, Adv. Theor. Math. Phys. **4**, 1 (2000).
[105] M. Domagala, J. Lewandowski, Class. Quantum Grav. **21**, 5233 (2004); K.A. Meissner, *ibid.*, 5245 (2004).
[106] A. Alekseev, A.P. Polychronakos and M. Smedback, Phys. Lett. B **574**, 296 (2003); A.P. Polychronakos, Phys. Rev. D **69**, 044010 (2004).
[107] I.B. Khriplovich, gr-qc/0409031; gr-qc/0411109.
[108] A. Ghosh and P. Mitra, Phys. Lett. B **616**, 114 (2005).
[109] T. Tamaki and H. Nomura, Phys. Rev. D **72**, 107501 (2005).
[110] I. Agulló, J.F. Barbero G., J. Díaz-Polo, E. Fernández-Borja and E.J.S. Villaseñor, Phys. Rev. Lett. **100**, 211301 (2008).
[111] T. Tamaki, Class. Quantum Grav. **24**, 3837 (2007).
[112] T. Tanaka and T. Tamaki, The European Physical Journal C **73**, 2314 (2013).
[113] S. Carlip, Class. Quantum Grav. **17**, 4175 (2000).
[114] J. Engle, K. Noui and A. Perez, Phys. Rev. Lett. **105**, 031302 (2010); J. Engle, K. Noui, A. Perez and D. Pranzetti, Phys. Rev. D **82**, 044050 (2010).
[115] A. Perez and D. Pranzetti, Entropy **13**, 744 (2011); E. Frodden, M. Geiller, K. Noui and A. Perez, European Physics Lett. **107**, 10005 (2014).
[116] S. Kloster, J. Brannlund and A. DeBenedictis, Class. Quantum Grav. **25**, 065008 (2008).
[117] A. Ashtekar, J. Engle and C. Van Den Broeck, Class. Quantum Grav. **22**, L27 (2005); C. Beetle and J. Engle, Class. Quantum Grav. **27**, 235024 (2010).
[118] K. Krasnov and C. Rovelli, Class. Quantum Grav. **26**, 245009 (2009); H. Sahlmann, Phys. Rev. D **84**, 044049 (2011).
[119] A. Ashtekar, *Lectures on non-perturbative quantum gravity*, editors R. Kulkarni, J. Samuel (University of Poona Press, Poona, 1990); H. Kodama, Phys. Rev. D **42**, 2548 (1990).
[120] S. Major and L. Smolin, Nucl. Phys. B **473**, 267 (1996); R. Borissov, S. Major and L.

Smolin, Class. Quantum Grav. **13**, 3183 (1996).

[121] S. Major, Class. Quantum Grav. **25**, 065003 (2008).

[122] J.D. Bekenstein and V.F. Mukhanov, Phys. Lett. B **360**, 7 (1995).

[123] S. Hod, Phys. Rev. Lett. **81**, 4293 (1998).

[124] L. Motl and A. Neitzke, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 307 (2003).

[125] O. Dreyer, Phys. Rev. Lett. **90**, 081301 (2003).

[126] O. Dreyer, F. Markopoulou and L. Smolin, Nucl. Phys. B **744**, 1 (2006).

[127] T. Tamaki and H. Nomura, Phys. Rev. D **70**, 044041 (2004).

[128] N. Andersson and C.J. Howls, Class. Quantum Grav. **21**, 1623 (2004).

[129] H. Nomura and T. Tamaki, Phys. Rev. D **71**, 124033 (2005).

[130] M.H. Ansari and L. Smolin, Class. Quantum Grav. **25**, 095016 (2008).

[131] L. Smolin，宇宙は自ら進化した，NHK 出版 (2007).

[132] L. Smolin, hep-th/0612185.

[133] P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).

[134] F.A. Aharonian et al., Astron. Astrophys. **349**, 11A (1999).

[135] A.N. Nikishov, Sov. Phys. JETP **14**, 393 (1962); J. Gould, G. Schreder, Phys. Rev. D **155**, 1404 (1967); F.W. Stecker, O.C. De Jager and M.H. Salmon, Astro. Phys. J. **390**, L49 (1992).

[136] G. Amelino-Camelia and T. Piran, Phys. Lett. B **497**, 265 (2001).

[137] T. Tamaki, T. Harada, U. Miyamoto and T. Torii, Phys. Rev. D **65**, 083003 (2002); *ibid.*, Phys. Rev. D **66**, 105003 (2002).

[138] R. Gambini and J. Pullin, Phys. Rev. D **59**, 124021 (1999).

[139] L. Smolin, Atoms of Space and Time (Scientific American, January 2004).

[140] J. Alfaro, H.A. Morales-Técotl and L.F. Urrutia, Phys. Rev. Lett. **84**, 2318 (2000); *ibid.*, Phys. Rev. D **65**, 103509 (2002); J. Alfaro, M. Reyes, H.A. Morales-Técotl and L.F. Urrutia, Phys. Rev. D **70**, 084002 (2004); J. Alfaro, M. Reyes, H.A. Morales-Técotl and L.F. Urrutia, J. Phys. A **36**, 12097 (2003).

[141] M. Bojowald, H.A. Morales-Técotl and H. Sahlmann, Phys. Rev. D **71**, 084012 (2005).

[142] 村上順，結び目と量子群，すうがくの風景 3，朝倉書店 (2000).

索　引

欧字

ABCK formalism　101
Ashtekar 接続　38

Barbero–Immirzi (BI) パラメーター　44
Bianchi の恒等式　132
Bohr の対応原理　116

Causal Set　5
Christoffel 記号　11

e-folding　16
Einstein の規約　10
Einstein 方程式　13

Friedmann–Robertson–Walker (FRW) 計量　14
fuzzball シナリオ　95

Galilei 変換　7

Hamiltonian 拘束条件　29
Hubble 定数　14
Hubble の法則　14

Jones 多項式　113, 127

Kronecker のデルタ　11

Lorentz 変換　8

n バレント　50

Peter–Weyl の定理　54

Reidemeister 変形　43
Ricci テンソル　13

s-knot 状態　43

Wheeler–DeWitt (WDW) 方程式　29
Wilson ループ　36

ア

一様等方宇宙　13
因果的動的単体分割　5, 119
インフレーション　16

宇宙検閲官仮説　26
宇宙項　1
宇宙の晴れ上がり　15
宇宙マイクロ波背景放射　15
運動量拘束条件　29

カ

外部曲率　27
関連子　53

共変テンソル　11
共変微分　12
共変ベクトル　11
極限ブラックホール　21
局所慣性系　9
曲率テンソル　12

空間的　9
繰り込み不可能　3

軽元素の存在比　15
計量　10
ゲージ拘束条件　39
原初ブラックホール　96

光円錐　9
光速度不変の原理　7
孤立地平面　101

サ

再結合　15

時間的　9
自己双対接続　38
事象　8
事象の地平面　20
実接続　44
シフトベクトル　27

スーパーインフレーション　85
スカラー曲率　13
スピンネットワーク　48
スピンフォームモデル　118
スペクトル指数　82
スロ－ロール　16

線素　9

相対性原理　7
双対変換　38

タ

ダークエネルギー　1
ダークマター　17

地平面問題　16
超輻射　22

テンソル・スカラー比　83

等価原理　9
等体積離散化　64
等面積離散化　63
特異点　24
特異点定理　2

ナ

人間原理　34

ノード　48

ハ

背景独立性　5
バウンス　77
反変ベクトル　11

非可換幾何学　5

フラックス　41
ブラックホール　20
ブラックホール情報喪失の問題　2
ブラックホール熱力学　2

平坦性問題　16

ホロノミー変数　35

マ

見かけの地平面　101

無境界境界条件　32
結び目理論　6, 43

モノポール問題　16

ラ

ラプス関数　27

リンク　48

著 者 略 歴

玉置　孝至（たまき　たかし）

1973 年　2 月 12 日生まれ
1985 年　和歌山県御坊市立御坊小学校卒業
1988 年　和歌山県御坊市立御坊中学校卒業
1991 年　和歌山県立日高高等学校卒業
1996 年　早稲田大学理工学部応用物理学科卒業
2001 年　早稲田大学大学院理工学研究科物理学及応用物理学専攻
　　　　学位取得　博士（理学）
2009 年　日本大学工学部総合教育助教
2013 年　日本大学工学部総合教育准教授
　　　　現在に至る．
専　門　相対論及び宇宙論

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ - 115
『ループ量子重力理論への招待　入門から新たな進展に向けて』
著　者　玉置 孝至
2015 年 3 月 25 日　初版発行

数　理　科　学　編　集　部　　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで．
表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 ©　株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-90：for Senior & Graduate Courses）

アインシュタイン方程式

一般相対性理論のよりよい理解のために

白水　徹也　著

定価 2417 円

本書はこれまでに得られたアインシュタイン方程式と一般相対性理論の美しい成果を包括的にまとめた．合わせて標準的な教科書ではあまりとり上げられない話題もとり上げている．観測技術の進歩と，adS/CFT 対応に見られるような理論の進展により，物理学が新たな展開を見せつつある中での意義深い一冊．

第１章　相対性理論とリーマン幾何学
一般相対性原理と等価原理／ユークリッド幾何学／ミンコウスキー時空／リーマン幾何学／微分幾何学入門／ウォルトの抽象添字

第２章　アインシュタイン方程式
アインシュタイン方程式／アインシュタイン方程式の導出／ニュートン重力の再現／作用原理／一般共変性と保存則

第３章　厳密解
4 次元ブラックホール解／宇宙論的解／高次元時空における厳密解／共形図形

第４章　時空の分解
超曲面，誘導計量，外的曲率／ガウス・コダッチ方程式／発展方程式／時空のハミルトニアン／境界がある場合の取り扱い

第５章　時空の接続
ガウス正規座標／接続条件／ダスト球殻／ブレーンワールド

第６章　エネルギー，運動量，角運動量
エネルギー／運動量・角運動量

第７章　諸定理とアインシュタイン方程式
アインシュタイン方程式の特殊性／特異点定理／ブラックホール／見かけの地平面／正エネルギー定理／ブラックホールの唯一性定理

サイエンス社